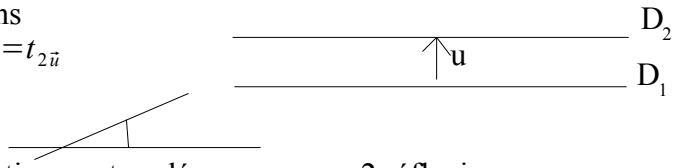
Exposé 43 : Groupe des isométrie du plan : décomposition d'une isométrie en produit de réflexions , groupe des déplacements , classification des isométries à partir de l'ensemble des points invariants.

Pré requis :

- Translations , réflexions , rotations
- composition de 2 réflexions
  Si D_1 //D_2 alors $S_{D_2} o S_{D_1} = t_{2\vec{u}}$
  Si $d_1 \cap D_2 = \{O\}$ alors
  $S_{D_2} o S_{D_1} = r(O, 2\alpha)$



- Une translation et une rotation peut se décomposer en 2 réflexions
- barycentres

(P,P') plan affine euclidien orienté

1) Groupe des isométries du plan

a) Généralités

Définition : Soit $f : P \to P$ *bijective* f est une isométrie du plan si et seulement si $\forall (A, B) \in P^2 \quad AB = f(A) f(B)$

Exemple les translation et les réflexions sont des isométries. Une projection orthogonale n'est pas une isométrie.

Théorème : Une isométrie est une application affine.

Preuve : F une isométrie . Soient $A, B, G \in P, A' = f(A), B' = f(B), G' = f(G)$

.Conservation du produit scalaire

$$2\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 - (\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB})^2 = GA^2 + GB^2 - BA^2$$
$$= G'A'^2 + G'B'^2 - B'A'^2 = G'A'^2 + G'B'^2 - (G'A' - G'B')^2 = 2\overrightarrow{G'A'}.\overrightarrow{G'B'}$$

.conservation du barycentre :

Soient a,b réel tel que a+b≠0

G=bar{(A,a)(B,b)} $\Leftrightarrow a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow a^2 GA^2 + b^2 GB^2 + 2ab\overrightarrow{GA}\,\overrightarrow{GB} = 0$

$\Leftrightarrow a^2 G'A'^2 + b^2 G'B'^2 + 2ab\overrightarrow{G'A'}\,\overrightarrow{G'B'} = 0$

$\Leftrightarrow a\overrightarrow{G'A'} + b\overrightarrow{G'B'} = \vec{0}$

⇔ f(G)=bar{(f(A),a)(f(B),b)}

b) Groupe des isométries

Notation :

On note Is(P) l'ensemble des isométries du plan.

Théorème : (Is(P) , o) est un groupe.

Preuve :

- $IdP \in Is(P)$ *donc* $Is(P) \neq \emptyset$
- Soit $f \in Is(P)$ $f o Id_P = Id_P o f = f$ Id_P élément neutre de (Is(P),o)

Soit $f, g \in Is(P)$ Soient $A, B \in P$ AB=g(A)g(B)=fog(A)fog(B)

Soit $M \in P$ $\quad \exists ! B \in P \; tq \; f(B) = M \; (f \; bijective)$
$\exists ! A \in P \; tq \; g(A) = B \; (g \; bijective)$
Donc $\exists ! A \in P \; tq \; fog(A) = f(B) = M \; donc \; fog \in Is(P)$

- Soit $f \in Is(P)$ et f^{-1} l'application réciproque de f est bijective.

Soient $A, B \in P, fof^{-1}(A) = A, fof^{-1}(B) = B \; donc \; fof^{-1}(A) \, fof^{-1}(B) = AB$
donc $fof^{-1}(A) \, fof^{-1}(B) = f^{-1}(A) \, f^{-1}(B)$ donc AB= $f^{-1}(A) \, f^{-1}(B)$ donc $f^{-1} \in Is(P)$

- . o est associative

c) Déplacement et anti-déplacements

Définition : On appelle déplacement une isométrie qui conserve les angles orientés . On appelle anti-déplacement une isométries qui inverse les angles orientés.

Exemple : Une rotation est un déplacement , une réflexion est un anti-déplacement.

Notation : On note $Is^{+}(P)$ l'ensemble des déplacements , $Is^{-}(P)$ l'ensemble des anti-déplacements.

Proposition : La composition de deux anti-déplacements est un déplacement.

Preuve : Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{P}$, Soient f,g deux antidéplacements .
$\vec{u}' = \vec{f}(\vec{u}), \vec{v}' = \vec{f}(\vec{v}), \vec{u}'' = \vec{g}(\vec{u}'), \vec{v}'' = \vec{g}(\vec{v}')$
$(\vec{u}', \vec{v}') = -(\vec{u}, \vec{v}) \; de \; plus \; (\vec{u}'', \vec{v}'') = -(\vec{u}', \vec{v}') \; d'où \; (\vec{u}'', \vec{v}'') = (\vec{u}, \vec{v})$ de plus $gof \in Is(P)$

Propriété : $(Is^{+}(P), o)$ est un sous-groupe de $(Is(P), o)$

Preuve :

- $IdP \in Is^{+}(P) \; donc \; Is(P) \neq \emptyset$
- Soit $f \in Is^{+}(P) \; f \, o \, Id_P = Id_P \, o \, f = f$ $\quad Id_P$ élément neutre de $(Is^{+}(P), o)$

Soit $f, g \in Is^{+}(P)$ f et g conservent les angles orientés donc fog conserve les angles orientés.

- Soit $f \in Is(P)$ et si $f^{-1} \in Is^{-}(P)$, f^{-1} inverse les angles orienté et f les conserve donc fof^{-1} les inverse donc contradiction....

2) Classification des isométries du plan

a) Isométries du plan ayant au moins un point fixe

Théorème : Une isométrie qui a 3 points fixes non aligné est l'identité

Preuve : Soient A,B,C trois points non alignés distincts.
Soit M un point quelconque du plan , M=bar{(A,a),(B,b),(C,c)} avec $a+b+c \neq 0$
M'=f(M) , M'= bar {(f(A),a),(f(B),b),(f(C),c)}
M'=bar {(A,a),(B,b),(C,c)} donc f=Id_P

Théorème : Une isométrie différente de l'identité qui a 2 points fixes A et B distincts est la réflexion d'axe (AB).

Preuve : Soit $f \in Is(P)$ $f \neq Id_P$ tq A=f(A) , B=f(B)
On note $S_{(AB)}$ la réflexion d'axe (AB)
Soit $c \in P, C \notin (AB) si\ f(C) = C\ alors\ f = Id_P$ impossible.
Donc $C' = f(C) \neq C$ CA=C'A et CB=C'B donc $A \in med[CC']et\ B \in med[CC']$ donc (AB) est la médiatrice de [CC'] d'où C'= $S_{(AB)}$ (C).
On a donc $S_{(AB)}$ o f qui admet 3 points fixes A,B,C non alignés donc $S_{(AB)} o\ f = Id_P$
Donc $f = S_{(AB)}$.

Théorème : Une isométrie qui admet un seul point fixe O est un rotation de centre O et d'angle non nul.

Preuve : $f \in Is(P), f(O) = O\ \forall M \neq O\ f(M) \neq M$.
$Soit\ A \in P, A \neq O,\ f(A) = A' \neq A$
On note S_Δ la symétrie d'axe Δ la médiatrice de [AA'] ,
OA=OA' donc $O \in \Delta$

Donc $S_\Delta o\ f(O) = O$ et $S_\Delta o\ f(A) = A$ Donc $S_\Delta o\ f$ qui a deux points fixes est soit l'identité soit une réflexion d'axe (OA) . Si $S_\Delta o\ f = Id$ alors $f = S_\Delta$ et f a au moins 2 points fixes contradiction.
Donc $S_\Delta o\ f$ est la réflexion d'axe [OA] Donc $f = S_\Delta o S_{(AB)}$ or Δ et (OA) sont sécantes en O et distinctes donc f est une rotation de centre O.

b) Isométries n'ayant aucun point fixe

Propriété : Soit $O \in P$, toute isométrie se décompose de manière unique en tog où g est une isométrie fixant O et t une translation.

Preuve : $f \in Is(P), O \in P, O' = f(O)$
Soient t et t' deux translations , g et g' deux isométries fixant O tq f=tog et f=t'og alors tog=t'og' t(O)=O' et t'(O)=O' donc $t = t' = t_{\overrightarrow{OO'}}$
d'où g=g'
Soient t la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$, t(O)=O'
On pose $g = t^{-1} of$ g est une isométrie et $t^{-1} o\ f(O) = O$ donc il existe t et g vérifiant les hypothèses tq f=tog

Théorème : Une isométrie qui n'admet aucun point fixe est soit une translation soit la composé d'une translation et d'une réflexion (on dit aussi symétrie glissé)

Preuve :
$soit\ tel\ que\ \forall M \in P, f(M) \neq M$ Soit $O \in P$, O'=f(O) , soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$
(tof)(O)=O et tof est une isométrie donc g=(tof) est soit lidentité , soitune réflexion , soit une rotation.

$f = t^{-1} o\, g$ si g est une rotation d'angle non num f est une rotation or f n'a aucun point fixe donc g n'est pas une rotation.
donc f est soit une translation soit la composé d'un translation et d'une réflexion.

c) Décomposition d'une isométrie en produit de réflexion

Théorème : Une isométrie se décompose en produit d'au plus trois réflexions.

Démonstration Soit $f \in Is(P)$

- Si $f = Id_P$ Soit $D \subset P$ une droite $S_D o S_D = f$
- Si $f = S_D$ immédiat
- Si $f = r(O, \alpha)$ $\alpha \neq 0$, r peut se décomposer en 2 réflexions d'axe D_1, D_2 non //
- Si $f = t_{\vec{u}}$, $t_{\vec{u}}$ peut se décomposer en 2 réflexions d'axe D_1, D_2 //
- Si $f = t_{\vec{u}} o\, S_D$, $t_{\vec{u}}$ peut se décomposer en 2 réflexions d'axe D_1, D_2 // donc $f = S_{D_1} o S_{D_2} o S_D$

Conséquences
Une isométrie conserve :

- l'alignement , le parallélisme , l'orthogonalité
- le contact
- le barycentres
- la mesure des angles géométries
- les aires

Une isométrie transforme

- Une droite en une droite , un segment en un segment
- un cercle en un cercle

Si une isométrie se décompose en un nombre pairs de réflexions alors c'est un déplacement sinon c'est un anti-déplacement.
Les déplacements sont les translations et les rotations . Les anti-déplacements sont les réflexions et les symétries glissées.

3) Applications

Quels sont des déplacements et antidéplacements qui laissent invariant un carré ABCD de sens direct de centre O?