Livret de connaissances du cycle 4

Auteur : Arnaud DURAND (10/08/2016)

Licence :

Nombres et calculs

Les nombres décimaux (opérations)

I. Expressions avec parenthèses

Propriété : On effectue en premier les calculs contenus dans les parenthèses.

Exemple : $A=3\times(5+(6-5))$ On observe une première paire de parenthèses qui contient une autre paire de parenthèses, on commence par cette dernière.

$A=3\times(5+(\boldsymbol{6-5}))$ J'effectue donc le calcul 6-5

$A=3\times(5+1)$ J'effectue ensuite le calcul 5+1 contenu entre parenthèses

$A=3\times6$

$A=18$

II. Expressions sans parenthèses

Propriété : Les multiplications et divisions sont prioritaires sur l'addition et la soustraction, ***on doit donc les effectuer en premier.***

Exemples :

$A=4+5\times2$ *La multiplication est prioritaire sur l'addition.*

$A=4+10$

$A=14$

$B=10-6:3$ *La division est prioritaire sur la soustraction*

$B=10-2$

$B=8$

Propriétés : - Si une expression ne contient que des additions et soustractions, ***on effectue les calculs de gauche à droite.***

- Si une expression ne contient que des multiplications et divisions, ***on effectue les calculs de gauche à droite.***

Exemples :

$A=10+5-7+2$

$A=15-7+2$

$A=8+2$

$A=10$

$B=10\times7:5$

$B=70:5$

$B=14$

Propriétés spéciales :

Si une expression ne contient que des additions, on peut calculer dans l'ordre que l'on souhaite.

Si une expression ne contient que des multiplications, on peut calculer dans l'ordre que l'on souhaite.

Exemples : $A=122+45+78$ C'est plus simple de commencer par 122 et 78 et je peux les additionner car il n'y a que des additions.

$A=200+45$

$A=245$

$B=8\times5\times2$ Je peux commencer par 5 et 2 et je peux les multiplier car il n'y a que des multiplications.

$B=8\times10$

$B=80$

III. Vocabulaire

Définitions :
— Le résultat d'une **addition** est une **somme**, les nombres dans l'addition s'appellent des **termes**.
— Le résultat d'une **soustraction** est une **différence**, les nombres dans la soustraction s'appellent des **termes**.
— Le résultat d'une **multiplication** est un **produit**, les nombres dans la multiplication s'appellent des **facteurs**.
— Le résultat d'une **division** est un **quotient**.

Exemple : $A = 4 + 5 \times 6$ est une somme car la dernière opération effectuée est une addition.

Les Fractions et quotient (opérations et simplifications)

I. Définition-Vocabulaire

Définition : Soit deux nombres n et d $(d \neq 0)$). Le quotient de n par d est le nombre qui multiplié par d, donne n. On peut l'écrire en écriture fractionnaire : $\frac{n}{d}$. n est appelé le **numérateur** et d le **dénominateur**.

$\frac{n}{d}$ est en conséquence aussi le résultat de la division de n par d. $n:d=\frac{n}{d}$

Exemple : Je multiplie le nombre 5 par $\frac{6}{5}$ pour obtenir 6 : $5\times\frac{6}{5}=6$.

Le quotient de 8 par 9 est $\frac{8}{9}$.

Vocabulaire : Une fraction est une écriture fractionnaire dont le numérateur et le dénominateur sont entiers.

II. Écritures fractionnaires égales

Propriétés : un Quotient ne change pas quand on multiplie (ou divise) son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul.

$\frac{a}{b}=\frac{a\times k}{b\times k}=\frac{a:d}{b:d}$

Exemple : $\frac{5}{7}=\frac{40}{56}$

$\frac{110}{30}=\frac{11}{3}$ *(on dit que la fraction* $\frac{110}{30}$ *a été simplifiée)*

Propriété : Un nombre a est divisible par un nombre b si et seulement le reste de la division euclidienne de a par b est 0, ceci permet de démontrer des critères de divisibilité.
En conséquence a divise b si on a : $a=b\times k+0$ ou $a=b\times k$

Pour trouver par quoi on peut diviser le numérateur et dénominateur de la fraction, on peut utiliser les critères de divisibilité : **voir chapitre divisibilité**

III. Comparaison de fractions

Pour comparer des fractions des fractions, on peut :

— Les réduire au même dénominateur et comparer les numérateurs (le sens de l'inégalité sera identique pour les fractions)

Exemple : Comparer $\frac{6}{4}$ et $\frac{14}{12}$:

$\frac{6}{4}=\frac{18}{12}$ on compare donc $\frac{18}{12}$ et $\frac{14}{12}$ or $18>14$

donc $\frac{18}{12}>\frac{14}{12}$ donc $\frac{6}{4}>\frac{14}{12}$

— Les réduire au même numérateur et comparer les dénominateurs (le sens de l'inégalité sera l'inverse de celui des fractions.

Exemple : Comparer $\frac{8}{12}$ et $\frac{16}{20}$:

$\frac{8}{12}=\frac{16}{24}$, on compare donc $\frac{16}{24}$ et $\frac{16}{20}$ or 24>20

donc $\frac{16}{24}<\frac{16}{20}$ donc $\frac{8}{12}<\frac{16}{20}$.

— On compare leurs écritures décimales.

Exemple : Comparer 5/2 et 7/4 :

$\frac{5}{2}=5:2=2{,}5$ $\frac{7}{4}=7:4=1{,}75$ donc comme $2{,}5>1{,}75$ alors $\frac{5}{2}>\frac{7}{4}$.

— On les place sur un axe gradué.

IV : Égalité des produits en croix

Propriété : Deux fractions sont égalités si et seulement si leurs produits en croix sont égaux.

On a : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ si et seulement si $a\times d=b\times c$

Exemples : Regardons si $\frac{7}{8}$ et $\frac{35}{40}$ sont égales.

Les produits en croix sont : 7×40 et 8×35.

$7\times 40=280$ et $8\times 35=280$.

Donc $\frac{7}{8}=\frac{35}{40}$

Compéter : $\frac{23}{15}=\frac{207}{...}$

On sait que les fractions sont égales donc $23\times\ldots=15\times 207$.

Appelons b le nombre cherché.

$23\times b=15\times 207$

D'où $23\times b=3105$

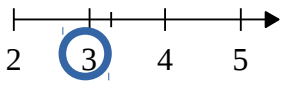
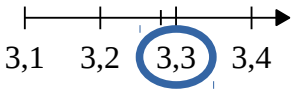
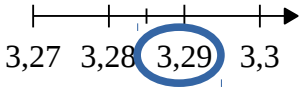
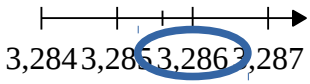
b est le nombre qui multiplié par 23 donne 3105, donc $b=\frac{3105}{23}=135$

V. Valeur approchée d'un quotient.

Définition-Vocabulaire
A un rang donné :
- La **troncature** d'un nombre est sa valeur approchée par défaut.
- **L'arrondi** d'un nombre est, de sa valeur approchée par défaut ou par excès, celle qui est la plus proche.

Exemple :

Nous allons procéder aux encadrements de $\frac{23}{7}$ et $23:7 \approx 3{,}285714286$

Rang	**Encadrement par les valeurs approchées par défaut et par excès**	**Troncature**	**Arrondi**	**Axe gradué**
A l'unité	$3<\frac{23}{7}<4$	3	3	3,285... 
Au dixième	$3{,}2<\frac{23}{7}<3{,}3$	3,2	3,3	3,285… 
Au centième	$3{,}28<\frac{23}{7}<3{,}29$	3,28	3,29	3,2857...  quand le nombre est au « milieu », on choisit la valeur par excès.
Au millième	$3{,}285<\frac{23}{7}<3{,}286$	3,285	3,286	3,28571.. 

VI. Opérations avec les écritures fractionnaires.

Addition/soustraction :
Pour additionner ou soustraire deux nombres en écriture fractionnaire, il faut :
- les réduire au même dénominateur (si ce n'est pas le cas)
- ajouter/soustraire les numérateurs et garder le dénominateur.

Exemples : $\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=\frac{7}{3}$ $\qquad \frac{3}{6}+\frac{4}{18}=\frac{3\times\mathbf{3}}{6\times\mathbf{3}}+\frac{4}{18}=\frac{9}{18}+\frac{4}{18}=\frac{13}{18}$

$\frac{3}{7}-\frac{2}{10}=\frac{3\times\mathbf{10}}{7\times\mathbf{10}}-\frac{2\times\mathbf{7}}{10\times\mathbf{7}}=\frac{30}{70}-\frac{14}{70}=\frac{16}{70}$

Multiplication :
Pour multiplier deux nombres en écritures fractionnaires, il faut :
- multiplier les numérateurs entre eux.
- multiplier les dénominateurs entre eux.

Exemples : $\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}=\frac{3\times5}{4\times6}=\frac{15}{24}$ $\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=\frac{7}{3}$

Définition : Deux nombres sont inverses lorsque leur produit vaut 1. Cela revient à « *inverser* » le dénominateur et le numérateur.

Exemples : $\frac{3}{4}$ a pour inverse $\frac{4}{3}$ 5 (ou $\frac{5}{1}$) a pour inverse $\frac{1}{5}$.

Division :
Diviser par un nombre en écriture fractionnaire revient à multiplier par son inverse.

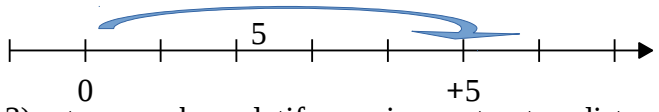
Exemple : $\frac{4}{5}:\frac{7}{6}=\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}=\frac{4\times6}{5\times7}=\frac{24}{35}$ $\frac{5}{6}:7=\frac{5}{6}:\frac{7}{1}=\frac{5}{6}\times\frac{1}{7}=\frac{5\times1}{6\times7}=\frac{5}{42}$

Les relatifs (opérations et repérage)

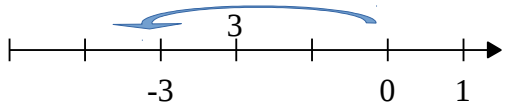
I.Définitions

Définition : Un nombre relatif est formé d'un signe + ou – d'un nombre appelé distance à zéro.

Exemples : (+5) est un nombre relatif, son signe est + et sa distance à zéro est 5.



(-3) est un nombre relatif, son signe est - et sa distance à zéro est 3.



Définitions : Un nombre comportant un signe **–** sont appelés les nombres **négatifs**
Un nombre comportant un signe **+** sont appelés les nombres **positifs**

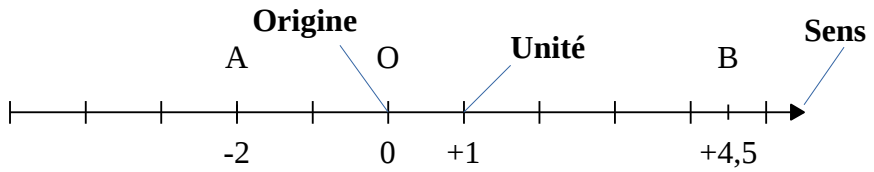
Remarque : 0 n'a pas de signe car il est à la fois positif et négatif.

II.Repérage sur un axe et comparaison

Définition : Une droite graduée est une droite qui contient un point nommé **Origine**, un autre appelé Unité et un sens.

Définition : Sur une droite graduée, chaque point est repéré par un nombre relatif. On dit que ce nombre est l'abscisse de ce point.

Exemple :



L'abscisse de A est (-2), on le note A(-2). B a pour abscisse +4,5, on écrit donc B(+4,5).

Remarque : L'origine de la droite graduée a pour abscisse 0.

Propriété :
Entre deux nombres relatifs **celui qui est le plus grand est celui qui se trouve le plus à droite sur un axe gradué** en conséquence :
Entre **deux nombres négatifs**, celui qui est le plus grand a la plus **petite distance à zéro.**
Entre **deux nombres positifs**, celui qui est le plus grand a la plus **grande distance à zéro.**
Entre **un nombre positif et un négatif**, celui qui est le plus grand **est le nombre positif.**

Exemples : (+2)<(+12) (-10) <(+14) (-19)< (-12)

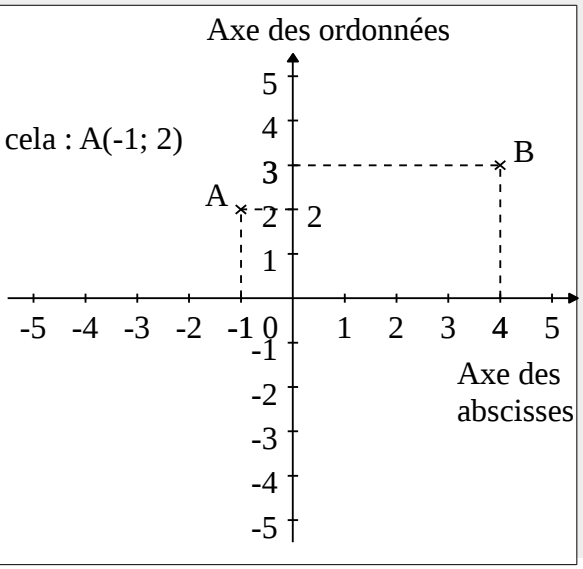
III. Repérage dans un plan.

Définition : Un **repère orthogonal** du plan est composé de deux droites graduées perpendiculaires et de même origine. L'une horizontale est appelée **axe des abscisses** et l'autre verticale est appelée **axe des ordonnées**.

Définition : Chaque point est repéré par deux nombres appelées **coordonnées** du point. Le premier nombre est **l'abscisse du point** et le second **l'ordonnée**.

Exemple :

Ici, A a pour abscisse -1 et ordonnées 2.
On dit que les **coordonnées** de A sont **(-1; 2)**. On note cela : A(-1; 2)
B a pour **abscisse 4** et **ordonnées 3**.
On dit que les coordonnées de B sont (4; 3).
On note cela : **B(4; 3)**



IV.Addition et soustraction de nombres relatifs.

Règle :

○ désignant un +
● **désignant un -**

1 jeton blanc et un jeton noir « donne » rien (=0)

<u>A)Addition</u>

Lorsque l'on ajoute deux quantités d'objets, suffit de compter l'ensemble des objets.
○○○○○○ + ○○○○○ = ○○○○○○○○○○○
En notation mathématique, on écrirait :
(+6) + (+5) = (+11)
« Il y a 6 jetons blancs, puis 5 jetons blancs donc il y a 11 jetons blancs en tout »

Sur le même principe :
●●●● + ●●●= ●●●●●●●
(-4) + (-3) = (-7)
« Il y a 4 jetons noirs, puis 3 jetons noirs donc il y a 7 jetons noirs en tout »

Enfin sachant qu'un jeton noir et blanc s'annule.
●●●●●● + ○○○ = ●●●●●●● ○○○ = ●●●
(-6) + (+3) = (-3)

Exemples : (+7) + (-9) = -2 (il ne reste que 2 jetons noirs) (+2)+(-2)=0

Définition : Deux nombres sont opposés si leur somme vaut 0. (-2) et (+2) sont **opposés.**

B)Soutraction

Lorsque l'on soustrait une quantité d'objets à une autre, alors il suffit **d'enlever** la seconde quantité à la première.

○○○○○○○ - ○○ = ○○○○○○~~○○~~ = ○○○○○

En notation mathématique, on écrirait :
(+7) - (+2) = (+5)
« Il y a 7 jetons blancs, j'enlève 2 jetons blancs donc il reste 5 jetons blancs »

Sur le même principe

●●●●●● - ●●●●= ●●

En notation mathématique, on écrirait :
(-6) - (-4) = (-2)
« Il y a 6 jetons noirs, j'enlève 4 jetons noirs donc il reste 2 jetons noirs »

Cas particulier où il faut se rappeler que ajouter un pion noir enlève un pion blanc (ils s'annulent), donc pour enlever 3 pions noirs, j'ajoute 3 pions blancs

○○○○○○ - ●●● =○○○○○○ + ○○○ ==○○○○○○○○○

En notation mathématique, on écrirait :
(+6) - (-3) = (-6) + (+3) = -3.

Règle à retenir : Soustraire un nombre revient à ajouter son opposé.

Exemples : (-7) - (+4) = (-7) + (-4) = -11. (+12) -(-4)=(+12)+(+4) = +16

V.Convention d'écriture

D'une suite d'additions et de soustractions de nombres relatifs, on peut supprimer les signes + des nombres positifs et utiliser le fait soustraire un nombre revient à ajouter son opposé.

Exemple :
A = (+6) +(-7) - (+8)
A = (+6) -(+7) - (+8) je m'arrange pour n'avoir que des nombres positifs afin de supprimer leur signe positif +(-7) devient -(+7)
A = 6-7-8
Cette écriture sert à alléger l'expression.

VI.Multiplication et division de nombres relatifs.

A) Multiplication par (-1)

Règle : Multiplier un nombre par (-1) revient à le transformer en son opposé.

Exemple : $(-5)\times(-1)=(+5)$ (+5 est l'opposé de -5)

B) Multiplication en général

Règle (des signes) :
Le produit de deux nombres de signes contraires est négatif.
Le produit de deux nombres de même signe est positif.

Facteur 1	Facteur 2	Résultat
-	-	+
+	+	+
-	+	-
+	-	-

Pour trouver la distance à zéro du résultat on multiplie les distances à zéro des facteurs.

Exemples : $(-5)\times(+6)=-30$ $(-4)\times(-8)=+32$

C.Division
La division fonctionne de la même manière que la multiplication, il suffira seulement de diviser les distances à zéro au lieu de multiplier.

Exemples : $(-6):(+3)=(-2)$ $(-12):(-4)=(+3)$

Les puissances (opérations)

I.Définition

Définition (exemple):
Par définition : $3^6 = \underbrace{3\times3\times3\times3\times3\times3}_{6\,facteurs}$

3^6 est une **puissance de 3, et 6 est l'exposant de cette puissance.**
Cela se lit « **3 exposant 6** » ou par abus de langage « 3 **puissance** 6 ».
L'exposant correspond au nombre d'itérations de la multiplication par le même nombre.

Remarque :
$3^1 = 3$ et par convention $3^0 = 1$.
On se souvient de $4^2 = 4\times4$ « quatre au carré » et $4^3 = 4\times4\times4$ « quatre au cube »

Exemples : $5^4 = 5\times5\times5\times5 = 725$ $x^3 = x\times x\times x$

II.Propriété : produit de puissance

Propriété(exemple avec une puissance de 10) :
$10^4\times10^3 = 10^{4+3} = 10^7$ En effet $10^4\times10^3 = \underbrace{10\times..\times10}_{4\,facteurs}\times\underbrace{10\times...\times10}_{3\,facteurs} = \underbrace{10\times..\times10}_{7\,facteurs} = 10^7$

même nombre

Attention $4^5 + 4^8 \neq 4^{13}$ **!**

Exemples : $10^5\times10^3 = 10^{5+3} = 10^8$ $x^3\times x^2 = x^5$

III.Puissances d'exposant négatif

Définition (exemple) :
Par définition : $5^{-6} = \frac{1}{5^6}$ En particulier : $8^{-1} = \frac{1}{8^1} = \frac{1}{8}$.

Remarque : 5^{-6} est l'inverse de 5^6 .

Exemples : $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001$ $2^{-1} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

IV.Propriété : quotient

Propriété (exemple avec une puissance de 10) :

$\frac{10^5}{10^8}=10^{5-8}=10^{-3}$ en effet

$$\frac{10^5}{10^8}=\frac{\overbrace{10\times10\times10\times10\times10}^{5\,facteurs}}{\underbrace{10\times10\times10\times10\times10\times10\times10\times10\times10\times10}_{8\,facteurs}}=\frac{1}{10\times10\times10}=\frac{1}{10^3}=10^{-3}$$

$\frac{10^7}{10^3}=10^{7-3}=10^4$ en effet $\frac{10^7}{10^3}=\frac{\overbrace{10\times\ldots\times10}^{7\,facteurs}}{\underbrace{10\times\ldots\times10}_{3\,facteurs}}=\frac{10\times10\times10\times10}{1}=10^4$

Remarque : $\frac{10^5}{10^5}=10^0=1$

V.Propriété : puissance de puissance

Propriété (exemple avec une puissance de 10)
$(10^5)^3=10^{5\times3}=10^{15}$ en effet $(10^5)^3=10^5\times10^5\times10^5=10^{15}$
On réitère 5 fois la multiplication par 10^3 , on réitère donc 15 fois la multiplication par 10.

VI. Calcul avec une puissance de 10

A) Calculs d'une puissance de 10

Propriété : Pour n'importe quel exposant : $10^n=1\underbrace{0\ldots0}_{n\,zéros}$ $10^{-n}=\underbrace{0{,}0\ldots..0}_{n\,zéros}1$

Exemples : $10^5=100\,000$ $10^{-6}=0{,}000\,001$

B) Produit par une puissance de 10

Propriété :
n est un entier positif.
Pour multiplier un nombre décimal par 10^n , on décale l'unité du nombre de n rang vers la droite.
Pour multiplier un nombre décimal par 10^{-n} , on décale l'unité du nombre de n rang vers la gauche.

Exemple :

$25{,}1\times10^5=25\underbrace{10\,000}_{5\,rangs}$

$25{,}1\times10^{-5}=0\underbrace{{,}00024}_{5\,rangs}1$

C) Préfixes scientifiques

Le tableau ci-contre permet d'indiquer, à l'aide des puissances de 10, par quel facteur est multipliée une unité pour obtenir des multiples de cette unité.

Préfixe	**giga**	**méga**	**kilo**	**milli**	**micro**	**nano**
Symbole	G	M	k	m	µ	n
Signification	10^9	10^6	10^3	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}

Exemples :

Un mégaoctet, noté Mo, représente 10^6 octets soit 1 million d'octets.

Un nanogramme, noté ng, représente 10^{-9} grammes, soit 1 milliardième de grammes.

VII.Notation scientifique

Les calculatrices, lorsque le résultat d'un calcul dépasse leur capacité d'affichage donner une valeur approchée du résultat en notation scientifique.

Définition :

Un nombre positif est écrit en notation scientifique lorsqu'il est écrit sous cette forme :

$a \times 10^n$ où :

- a est un nombre décimal tel que $1 \leq a < 10$ (c'est-à-dire que a s 'écrit avec un seul chiffre autre que zéro avant la virgule)
- n est un nombre entier relatif.

Exemples :

$G = 7{,}15 \times 10^3$ est un nombre écrit en notation scientifique.

$H = 0{,}33 \times 10^6$ n'est pas écrit en notation scientifique.

$I = 1{,}3 \times 5^4$ n'est pas écrit en notation scientifique.

Exemple d'opérations avec des écritures scientifiques

$A = 3 \times 10^5 \times 2 \times 10^6$

$A = 3 \times 2 \times 10^5 \times 10^6$

$A = 6 \times 10^{11}$

$B = \frac{5 \times 10^5}{4 \times 10^{-7}}$

$B = \frac{5}{4} \times \frac{10^5}{10^{-7}}$

$B = 1{,}25 \times 10^{5-(-7)}$

$B = 1{,}25 \times 10^{5+7} = 1{,}25 \times 10^{12}$

Divisibilité : (fractions irréductibles, divisions euclidienne, critères de divisibilité, nombres premiers, décomposition en facteurs premiers)

I. Définitions

Définitions : Dire que a est un **multiple** de b signifie qu'il existe un entier k tel que $a=b\times k$
On dira également que b **divise** a ou que b est un **diviseur** de a.

Exemples : $18=3\times 6$ dont 18 est un **multiple** de 3 (et aussi un multiple de 6)
6 divise 18 et 3 divise 18. 6 et 3 sont des **diviseurs** de 18.

Remarque : 1 divise tous les nombres entiers et par conséquent, tous les nombres sont leurs propres multiples. Par exemple $12=12\times 1$ donc 1 divise 12 et 12 est un multiple de … 12

II. Critères de divisibilité

Un nombre est divisible par 2 si : le chiffre est unité est 0,2,4,6 ou 8.
Un nombre est divisible par 3 si : la somme des chiffres du nombre est divisible par 3
Un nombre est divisible par 5 si : le chiffre est unité est 5 ou 0.
Un nombre est divisible par 9 si : la somme des chiffres du nombre est divisible par 9
Un nombre est divisible par 10 si : le chiffre est unité est 0.

Exemples : 3345 est divisible par 5 (l'unité est 5)
et par 3 (3+3+4+5=15 et 15 est divisible par 3)

III. Nombres premiers

Définition : Un nombre entier est **premier** s'il n'admet que deux diviseurs distincts, 1 et lui-même.

Exemple : Les nombres premiers sont : 2,3,5,7,11,13,17 …. 1 n'est pas un nombre premier car il n'a qu'un seul diviseur.

IV.Diviseurs communs

Définition : On dit qu'un nombre d est un **diviseur commun** à a et b si a et b sont divisibles par d .

Exemple : 2,3,5 sont des diviseurs communs à 60 et 90.

Définition : On dit que deux nombres entiers sont **premiers entre eux** si leur seul diviseur commun est 1.

Exemple : 42 et 51 sont premiers entre eux.
Les diviseurs de 42 sont : 1,2,3,6,7,14,21,42.
Les diviseurs de 51 sont : 1,3,17,51.

Le seul diviseur commun est 1, donc 42 et 51 sont premiers entre eux.

V. Décomposition et fractions irréductibles

Propriété : On peut toujours décomposer un nombre non premier en produit de plusieurs facteurs premiers, cette décomposition est unique.

Exemple : $324 = 2\times162$
$= 2\times2\times81$
$= 2\times2\times3\times27$
$= 2\times2\times3\times3\times9$
$= 2\times2\times3\times3\times3\times3=2^2\times3^4$

Propriété : On dit que la fraction $\frac{a}{b}$ est **irréductible** si a et b sont **premiers entre eux.** *Cela signifie que la fraction a été réduite ou simplifiée au maximum.*

Exemple : $\frac{15}{13}$ est une fraction **irréductible** car 15 et 13 sont premiers entre eux.

Calculs littéraux
(test égalité notion de variable, développer factoriser)

I. Expression littérale

Définition : Une **expression littérale** est une expression mathématique contenant une ou plusieurs **lettres** qui désignent des nombres.

Exemples :
Longueur d'un cercle : $\pi \times 2 \times r$ où r représente le rayon du cercle et π est un nombre constant qui vaut environ 3,14…
L'aire d'un carré est donné par $c \times c$ où c représente le côté du carré

Simplification d'une expression littérale : On peut simplifier les expressions en supprimant le signe $\times$ si et seulement s'il est suivi d'une lettre ou en utilisant les puissances.

Exemples : $x \times 6$ n'est pas simplifiable car le signe $\times$ est suivi de 6 mais on peut procéder comme cela : $x \times 6 = 6 \times x = 6x$
$\pi \times 2 \times r = 2 \times \pi \times r = 2\pi r$
$c \times c \times c = c^3$

II. Calculer la valeur d'une expression littérale et tester une égalité.

Définition : On calcule la valeur d'une expression littérale lorsque l'on attribue une valeur aux lettres contenues dans l'expression.
Attention si une même lettre est utilisée plusieurs, on lui attribue le même nombre à chaque fois.

Exemple : Calculer l'expression $A = 5 \times (6 - x) + 3x - 7y$ lorsque $x = 2$ et $y = 1$.
$A = 5 \times (6 - 2) + 3 \times 2 - 7 \times 1$ On n'oubliera pas de remettre le signe $\times$ à $3x$ et $7y$
$A = 5 \times 4 + 6 - 7$
$A = 20 + 6 - 7$
$A = 19$

Définition : Une égalité est constituée de deux expressions littérales appelées « membres » séparées par un signe « = »

Propriété : On dit qu'une égalité est vraie (ou est vérifiée) si les deux expressions représente le même nombre.

Exemples : $5 \times 2 = 4 + 6$ est vraie car $5 \times 2 = 10$ et $4 + 6 = 10$
$4 \times 6 = 24 + 3$ est fausse car $4 \times 6 = 24$ et $24 + 3 = 27$

Définitions : Deux expressions littérales sont égales si et seulement si elles sont égales quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres.

Exemples : $4x+6+2x=2x\times3+2\times3$ est vraie car

$4x+6+2x=4x+2x+6=6x+6$

ajoute dans l'ordre que l'on veut

$2x\times3+2\times3=2\times x\times3+2\times3=2\times3\times x+2\times3=6\times x+6=6x+6$

$3x+6=2(x+5)$ est fausse car

si $x=1$ alors $3x+6=3\times1+6=9$

et $2(x+5)=2\times(1+5)=2\times6=12$

III. Développement et factorisation

vidéo distributivité dans tous ses états
http://mathix.org

Distributivité :

$k\times(a+b)=k\times a+k\times b$ $\qquad$ $k\times(a-b)=k\times a-k\times b$

" *Le facteur distribue des colis et des lettres.*" = " Le facteur distribue des colis et le facteur distribue des lettres."

k × (a +/- b) = k × a +/- k × b

Exemple pour comprendre d'où cela vient.

Nous allons développer : $3\times(7x+2)$

Multiplier par 3 revient à ajouter ce nombre 3 fois ($5\times3=5+5+5$)!

$3\times(7x+2)=7x+2+7x+2+7x+2=3\times7x+3\times2$

On a bien écrit : $3\times(7x+2)=3\times7x+3\times2$

Définition : **Développer** une expression littérale, c'est transformer un produit en somme ou différence.

Exemple : $A=5\times(x+3)$

$A=4\times(6+2x)$ C'est un produit de 4 par (6+2x)

$A=4\times6+4\times2x$

$A=24+8x$ C'est une somme de 24 et $8x$

Définition : **Factoriser** une expression littérale, c'est transformer une somme ou une différence en un produit, ***c'est l'inverse du développement.***

Exemples : $A=5\times x+5\times3$ On détecte le facteur commun aux deux produits

$A=5\times(x+3)$ On écrit entre parenthèses les deux autres facteurs.

Si les produits ne sont pas apparents, il faut les faire apparaître.

$B=24-4x$

$B=4\times6-4\times x$

$B=4(6-x)$

IV.Réduction

Définition : **Réduire une somme**, c'est l'écrire avec le moins de termes possibles (en regroupant les termes de même espère). **Réduire un produi**t, c'est l'écrire avec le moins de facteurs possibles.

Exemple simple : $A=4x+6y+2x-y=6x+5y$
« 4 balles + 6 torchons + 2 balles – 1 torchon = 6 balles + 5 torchons »

Exemples : complexes	$A=4x+6y-7x+4x^2-5y$	*Je transforme les soustractions en additions*
	$A=4x+6y+(-7x)+4x^2+(-5y)$	Je regroupe les termes de même espèce, ceux ayant la même partie littérale
	$A=4x+(-7x)+6y+(-5y)+4x^2$	*Je calcule*
	$A=-3x+1y+4x^2$	
	$B=5\times3x\times y\times4x^2$	*Je rajoute les signes* $\times$
	$B=5\times3\times x\times y\times4\times x^2$	*Je réordonne les facteurs, lettres à droite.*
	$B=5\times3\times4\times x\times x^2\times y$	*Je calcule et réduis*
	$B=60\times x^3\times y$	*Je supprime les signes* $\times$
	$B=60x^3y$	

V. Addition d'une somme et soustraction d'une somme

Addition d'une somme : Additionner une somme revient à ajouter chacun de ses termes.

Exemple : $A=5x+(4x+4)$ $\quad$ $B=5+(4x-6)$ *je transforme 4x-6 en addition*
$A=5x+4x+4$ $\quad$ $B=5+(4x+(-6))$
$A=9x+4$ $\quad$ $B=5+4x+(-6)=4x+(-1)$

Définition (rappel) : **- multiplier par (-1) revient à prendre l'opposé d'un nombre.**
- Soustraire un nombre revient à ajouter son opposé.

Exemple : $A=5-(4x+5)$ $\rightarrow$ *Je soustrais la somme* $4x+5$, *ajoute donc l'opposé de cette somme. Ce qui revient à ajouter cette somme multipliée par (-1)*
$A=5+(-1)\times(4x+5)$
$A=5+(-4x)+(-5)$

Soustraction d'une somme : Soustraire une somme revient à ajouter l'opposé de ses termes.

Exemple : $A=4-(3x+(-5))$
$A=4+\underset{opp}{(-3x)}+\underset{opp}{(+5)}$

VI. Double distributivité et identités remarquables.

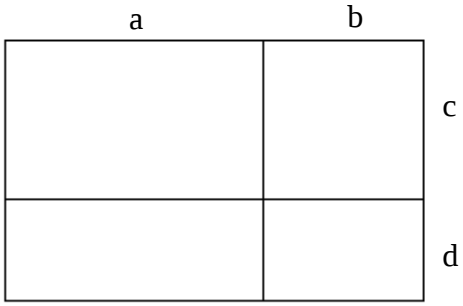
Double distributivité :

$$(a+b)(c+d)=a\times c+a\times d+b\times c+b\times d$$

L'aire du rectangle est donnée à la fois par :

$(a+b)(c+d)$

et $a\times c+a\times d+b\times c+b\times d$ *(la somme des aires de chaque rectangle)*



Exemple :

$A=(5x-6)(2x+1)$	*Je transforme les soustractions en additions..*
$A=(5x+(-6))(2x+1)$	*Je développe.*
$A=5x\times 2x+5x\times 1+(-6)\times 2x+(-6)\times 1$	*Je réduis les produits.*
$A=10x^2+5x+(-12x)+(-6)$	*Je réduis la somme.*
$A=10x^2+(-7x)+(-6)$	

Les identités remarquables :

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ $\quad$ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ $\quad$ $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

Ces propriétés servent à factoriser rapidement.

Exemple : Factoriser $A=4x^2+10x+25$ $\quad$ $B=16x^2-9$

$A=(2x)^2+2\times 5\times x+5^2$ $\quad$ 1e formule $\quad$ $B=(4x)^2-3^2$ $\quad$ 3e formule

$A=(2x+5)^2$ $\quad$ $B=(4x-3)(4x+3)$

VII. Le calcul comme outil de démonstration.

Si l'on veut montrer des vérités par exemple

que *la somme de 3 nombres consécutifs est toujours divisible par 3*, on peut utiliser le calcul littéral.

Démonstration :

Soit n un entier quelconque. Alors $n-1$ est le nombre précédent et $n+1$ le nombre suivant.

Si je les ajoute, j'additionne bien 3 entiers consécutifs.

$n-1+n+n+1=n+n+n-1+1=3n$

$3n$ est un nombre divisible par 3.

CQFD.

(In)Équations (équation du premier degré et inéquation)

I.Définitions

Problème : « *Parmi les nombres, on choisit un nombre, on le multiplie par 3, puis on ajoute 7. On obtient comme résultat : 1.* »

En désignant le nombre choisi par x , l'énoncé peut s'écrire par l'égalité : $3x+7=1$

Définitions (à l'aide de l'exemple) :
L'égalité $3x+7=1$, qui n'est vérifiée que pour est une **équation**.
Le **premier membre** (ou membre de gauche) de l'équation est $3x+7$.
Le **second membre** (ou membre droite)de l'équation est 1 .
Le nombre x figurant dans l'équation s'appelle **l'inconnue.**
Rechercher pour quelles valeurs de l'inconnue l'égalité est vérifiée s'appelle **résoudre l'équation.**
Le seul nombre qui vérifie $3x+7=1$ est $x=-2$ car $3\times(\mathbf{-2})+7=1$
Le nombre -2 est donc la **solution** de l'équation.

II Égalité et opérations

Propriété : A partir d'une égalité, on obtient une égalité équivalente si *on ajoute ou on retranche un même nombre à chaque membre*.

<u>Application</u> *:* On considère l'équation $x+8=3$. On considère l'équation $y-6=9$
On peut soustraire le nombre 8
à chacun des membres.

-8 $x+8=3$ -8
$x=-5$

+6 $y-6=9$ +6
$y=15$

Propriété :
A partir d'une égalité, on obtient une égalité équivalente si *on multiplie ou divise chaque membre par un même nombre (différent de zéro).*

<u>Application</u> *: On* considère l'équation *7 x = 4.* *On* considère l'équation $\frac{t}{4}=9$

On divise par 7 chacun des deux membres :

:7 $7x=4$:7
$x=\frac{4}{7}$

×4 $\frac{t}{4}=9$ ×4
$t=36$

Voir équadorix
http://mathix.org/equadorix

III.Méthode de résolution

A) Équations de la forme $ax+b=c$.

Exemple :
Soit l'équation $3x-7=5$

Sur la feuille

$$\begin{array}{ccc} & 3x-7=5 & \\ +7 & & +7 \\ :3 & 3x=12 & :3 \\ & x=4 & \end{array}$$

Au brouillon
Je cherche comment « passer de x à $3x-7$ »

$$\begin{array}{ccccc} x & \xrightarrow{\times 3} & 3x & \xrightarrow{-7} & 3x-7 \\ & \xleftarrow{:3} & & \xleftarrow{+7} & \end{array}$$

On reprend les opérations du dessous pour résoudre l'équation.

La solution de l'équation est : $x=4$

B.Équations de la forme $ax+b=cx+d$.

Exemple :
Soit l'équation $3x-7=5x+3$

Sur la feuille

$$\begin{array}{ccc} & 3x-7=5x+3 & \\ -5x & & -5x \\ +7 & -2x-7=3 & +7 \\ :(-2) & -2x=10 & :(-2) \\ & x=-5 & \end{array}$$

Au brouillon
Je cherche comment « éliminer les x dans le membre de gauche»
On enlève $5x$ dans chaque membre.

Ensuite on résout comme dans la partie précédente

$$\begin{array}{ccccc} x & \xrightarrow{\times(-2)} & -2x & \xrightarrow{-7} & -2x-7 \\ & \xleftarrow{:(-2)} & & \xleftarrow{+7} & \end{array}$$

On reprend les opérations du dessous pour finir de résoudre l'équation.

La solution de l'équation est : x=-5

Dans le cas d'équation qui ne sont pas de ces formes, on développe et réduit les membres d'abord.

IV. Équation produit nul

Propriété : On dit qu'un produit est nul si et seulement si au moins un de ses facteurs est nul.

Exemple : (5x-1)(3x+1)=0
C'est une équation produit nul donc

On a : $5x-1=0$ ou $3x+1=0$

d'où $5x=1$ $\quad$ $3x=-1$

$x=\frac{1}{5}$ $\quad$ $x=\frac{-1}{3}$

L'équation a deux solutions : $\frac{1}{5}$ et $\frac{-1}{3}$.

V. Inégalités & inéquations.

Définitions $a<b$ signifie que a est **strictement inférieur** à b
$a\leqslant b$ signifie que a est **inférieur ou égal** à b .
De même $a>b$ signifie que a est **strictement supérieur** à b
$a\geqslant b$ signifie que a est **supérieur ou égal** à b .

Propriété : A partir d'une inégalité, on obtient une égalité équivalente si *on ajoute ou on retranche un même nombre à chaque membre*.

Application : On considère l'inéquation $3+x<8$
On peut soustraire le nombre 3 à chacun des membres.

-3 $3+x<8$ -3
$x<5$

On considère l'inéquation $y-2\geqslant 7$

+2 $y-2\geqslant 7$ +2
$y\geqslant 9$

Propriété :
À partir d'une égalité, on obtient une égalité équivalente si *on multiplie ou divise chaque membre par un même nombre* ***strictement positif.***
Si l'on multiplie ou divise par un nombre strictement négatif, alors le sens de l'inégalité change!

Application : *On* considère l'équation *-7 x > 4.*
On divise par 7 chacun des deux membres :

:(-7) $7x>4$:(-7)
$x>\frac{4}{7}$

On divise par un nombre négatif, on change le sens de l'inégalité!

On considère l'équation $\frac{t}{4}\leqslant 9$

×4 $\frac{t}{4}\leqslant 9$ ×4
$t\leqslant 36$

Organisation et gestion de données, fonctions

Statistiques : (vocabulaire, données sous forme de tableau, graphique, calculer effectifs, fréquence, diagramme circulaire, moyenne, médiane, étendue)

I. Vocabulaire et moyenne

Exemple :
On a pesé 12 téléphones portables et obtenu les poids suivants (en g) :
95 105 100 90 95 105 95 105 100 95 100 100
Ces données, c'est-à-dire les douze masses, constitue une **série statistique**
La **population** est l'ensemble des téléphones portables.
Le **caractère étudié** est la masse des téléphones portables.
Les **valeurs** du caractère sont les quatre masses obtenues : 90 95 100 105.
Les **valeurs extrêmes** sont la plus petite et la plus grande des masses relevées : 90 et 105.
L'effectif d'une valeur du caractère est le nombre de téléphones portables dont la masse est égale à cette valeur. Par exemple, l'effectif de la valeur 95 est 4.
L'effectif total de la série est le nombre total de masses relevées : 12.
La fréquence d'une valeur est le quotient de son **effectif** par **l'effectif total**.
Par exemple la fréquence de la valeur 105 est $\frac{3}{12}=0{,}25$ La fréquence peut être écrite en pourcentage, en écriture décimale ou en fraction.
L'étendue est la différence entre la valeur la plus haute et la plus basse : 105-90 = 15.

On peut résumer cette série par un tableau d'effectifs et de fréquence

Valeurs	**90**	**95**	**100**	**105**	**Total**
Effectifs	1	4	4	3	12
Fréquences	$\frac{1}{12}$	$\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$	$\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$	$\frac{3}{12}=\frac{1}{4}=0{,}25$	$\frac{12}{12}=1$

Définition : La moyenne de cette série s'obtient en multipliant tous les effectifs avec la valeur du caractère correspondant et en divisant le tout par l'effectif total.

$$M=\frac{90\times1+95\times4+100\times4+105\times3}{12}=98{,}75$$

II.Médiane

Définition : On appelle **médiane** m d'une série statistique dont les valeurs sont ordonnées **tout nombre qui partage cette série en deux groupes de même effectif.**

Définition : **L'étendue** d'une série statistique est la **différence entre la plus grande et la plus petite des valeurs** prises par cette série.

Exemple 1 : Voici le temps consacré en minutes, au petit déjeuner par 16 personnes.
16 12 1 9 17 19 13 10 4 8 7 8 14 12 14 9

On commence par ranger les valeurs dans l'ordre croissant puis on coupe la série en 2 parts égales.

1 4 7 8 8 9 9 10 — Le groupe des 8 **petites valeurs**

12 12 13 14 14 16 17 19 — Le groupe des 8 **grandes valeurs**

11 est un nombre qui sépare la série en deux groupes de même effectif.
La médiane est 11. (j'aurais pu choisir le nombre 10,5 également)

Exemple 2 :
Soit la série suivante représentée par ce tableau d'effectifs :

Longueurs	30	40	50	55	60	70	80
Effectifs	5	6	8	7	2	5	6

Il faut calculer l'effectif total : 39
39 est un nombre impair donc on « partage » la série en 2 groupes de 19 valeurs et il restera une valeur entre les deux. *Ce sera la médiane (puisque ce nombre séparera la série en 2 parts égales).*

5 valeurs 30 6 valeurs 40 8 valeurs 50	1 valeur 55	6 valeurs 55 2 valeurs 60 5 valeurs 70 6 valeurs 80

Le groupe des 19 **petites valeurs** — Le groupe des 19 **grandes valeurs**

La médiane est donc 55, ici c'est une valeur de la série.

III.Représentation graphique.

Exemple :

Exemple : Les élèves de 5eC font une étude statistique sur le nombre de sports qu'ils pratiquent. À la question « Combien de sports pratiques-tu ? », voici les réponses des élèves :

0;3;2;0;0;1;1;2;1;1;3;0;1;2;1 ;3;0;2;1;1;2;0;1;0;1.

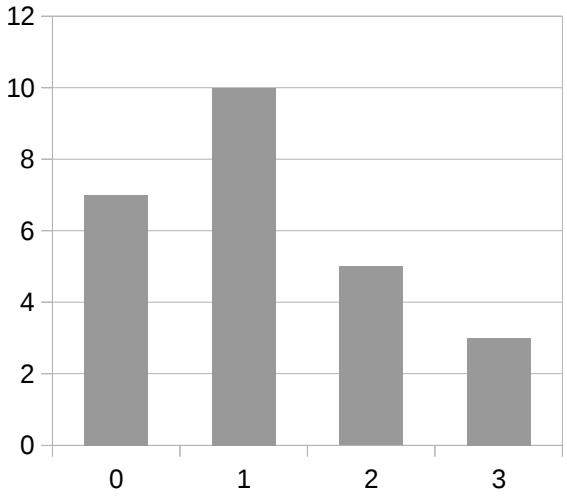
En voici le tableau d'effectifs auquel on a ajouté les fréquences et les caractéristiques des représentations graphiques

Nombre de sports pratiqués	0	1	2	3	Total
Effectifs	7	10	5	3	25
Fréquence en pourcentage	$\frac{7}{25}=28\%$	40%	20%	12%	100%
Fréquence en nombre décimal	0,28	0,4	0,2	0,12	1
Angle du diagramme circ.	100,8	144	72	43,2	360
Longueur du diagramme à bande	2,8	4	2	1,2	10

×360

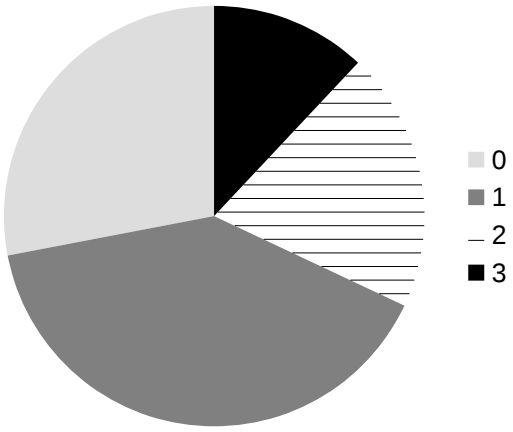
×10

A)Diagramme en bâtons

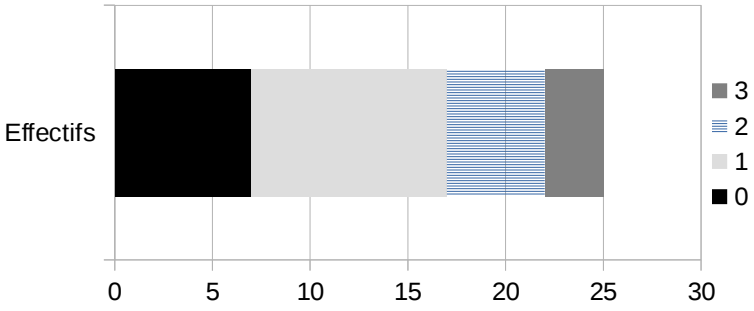


B)Diagramme circulaire

L'angle de chaque partie est proportionnelle à la fréquence ou l'effectif de la valeur associée



C)Diagramme à bandes



Probabilité : (équiprobabilité, interprétation fréquentiste, calcul de probabilités simples, vocabulaire, notations)

I.Vocabulaire

1. Expérience aléatoire

Définition : Une expérience est dite « aléatoire » si elle vérifie deux conditions :
- Elle conduit à des résultats possibles qu'on est parfaitement capable de nommer
- On ne sait pas lequel de ces résultats va se produire quand on réalise l'expérience.

Exemples :
- *On lance une pièce de monnaie et on regarde sur quelle face elle tombe.*
Cette expérience est aléatoire car :
il y a deux résultats possibles : « PILE » « FACE »
quand on lance une pièce on ne sait pas sur quelle face elle va tomber.

- *On dispose d'un dipôle dont on connaît la résistance et dans lequel on fait passer un courant d'intensité connue. On mesure la tension aux bornes.*
Cette expérience n'est pas aléatoire car on est capable de calculer la tension aux bornes du dipôle par la loi d'Ohm.

2. Événement

Définition :A partir d'une expérience aléatoire on peut définir ce qu'on appelle des événements qui sont des ensembles de résultats.

Exemple :
Expérience : « Lancer un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6 »
- « Obtenir un nombre pair » est un événement car c'est l'ensemble des résultats suivants :
« obtenir 2 » ou « obtenir 4 » ou « obtenir 6 »

Remarque : Un résultat d'une expérience est aussi appelé **événement élémentaire.**

Définition : Si les résultats de l'expérience ont autant de chance d'être exécuté alors on dit qu'expérience est **équiprobable**.

II. Probabilité

1. Définition intuitive

Définition : Pour certaines expériences aléatoires on peut déterminer par un quotient la « *chance* » qu'un événement a de se produire. Ce quotient est appelé **probabilité** de l'événement.

Exemple : Si on tire au hasard une boule dans un sac contenant 8 boules dont 3 sont rouges et 5 sont vertes, la probabilité de tirer une boule rouge est de $\frac{3}{8}$ car on a 3 « chances » sur 8 de tirer une boule rouge.

2. Probabilité et fréquence

Propriété : Si on répète une expérience aléatoire un très grand nombre de fois, la fréquence de n'importe quel événement de cette expérience finit par se stabiliser autour d'un nombre qui est la probabilité de cet événement.

Exemple : « *On dispose d'une urne qui contient 2 boules jaunes et 3 boules rouges on tire une boule au hasard et on s'intéresse à la couleur de la boule tirée.* »

Si on renouvelle un très grand nombre de fois cette expérience en remettant chaque fois la boule tirée dans l'urne, la fréquence du résultat « *la boule est jaune* » se stabilise autour de $\frac{2}{5}$ qui est la probabilité de l'événement « *Obtenir une boule jaune* »

3. Calculer une probabilité

Propriété :
Quand les résultats d'une expérience aléatoire ont tous la même probabilité alors la probabilité d'un événement est égale au quotient : $\frac{\textbf{\textit{nombre de résultats favorables}}}{\textbf{\textit{nombre de résultats possibles}}}$

Exemple :
Expérience : « *On lance un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre inférieur à 5* ?

Les résultats « *obtenir 1* » ou « *obtenir 2* » ou « *obtenir 3* » « *obtenir 4* » ou « *obtenir 5* » ou « *obtenir 6* » ont la même probabilité.
Les résultats favorables à l'événement « *obtenir un nombre inférieur à 5* » sont :
« *obtenir 1* » ou « *obtenir 2* » ou « *obtenir 3* » « *obtenir 4* ».
Donc le nombre de résultats favorables est 4.
La probabilité est donc de $\frac{4}{6}$. (on dit aussi naturellement j'ai 4 chances sur 6 d'avoir un nombre inférieur à 5)

Propriété :
La probabilité d'un événement est toujours compris entre 0 et 1.
La somme des probabilités de tous les résultats possibles est égale à 1.

4. Événement contraire

propriété : Si p est la probabilité d'un événement alors $1-p$ est la probabilité de son événement contraire.

Exemple : un sac contient des boules blanches et noires et si la probabilité d'obtenir une boule noire est de $\frac{2}{5}$ alors la probabilité d'obtenir une boule blanche est de $1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

Événements impossibles et certains.

On dit qu'un événement est certain lorsque cet événement est sûr de se produire.
Sa probabilité est donc de 1.
On dit qu'un événement est impossible lorsque cet événement est sûr de ne pas se produire.
Sa probabilité est donc de 0.

5. Événements indépendants.

On dit que deux événements sont indépendants quand le « premier événement n'influence pas le second » .

Par exemple, lors du lancer de dés.
Le premier événement est « j'obtiens 1 au premier lancé » et le second est « j'obtiens 2 au 2e lancer ».
Que le premier événement se produise ou non, la probabilité que le 2e événement se produise est la même, donc les événements sont indépendants.

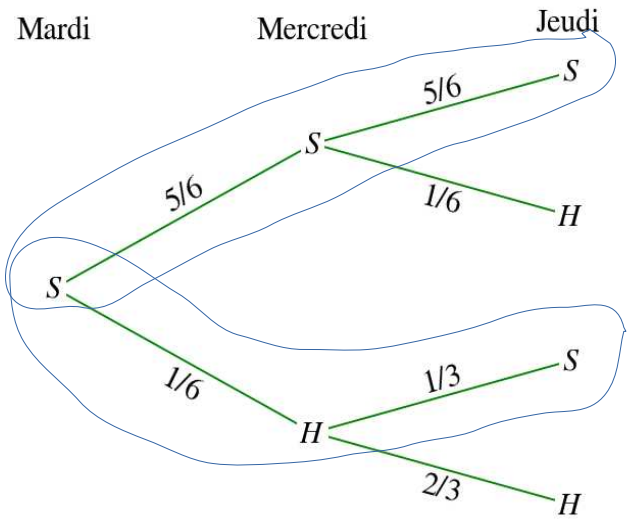
III. Arbre de probabilité

1. La probabilité de que deux événements indépendants se produisent.

La probabilité que deux événements indépendants A et B se produisent est donné par

$$P(A\,et\,B)=P(A)\times P(B)$$

2. Construction d'un arbre lors d'une expérience à plusieurs épreuves.



Si le temps est sec un jour (S) alors il sera sec le lendemain avec la probabilité $\frac{5}{6}$.
Si le temps est humide (H) alors il sera humide le lendemain avec la probabilité $\frac{2}{3}$.
Aujourd'hui, mardi, le temps est sec.

Pour calculer la probabilité correspondant à un événement avec une seule issue, on multiplie les probabilités « rencontrées » sur la branche.

$$P(\text{« Il fera Sec Mercredi »}\,et\,\text{« Il fera Sec Jeudi »})=\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{36}$$

$$P(\text{« Il fera Humide Mercredi »}\,et\,\text{« Il fera Sec Jeudi »})=\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$$

Pour calculer la probabilité correspondant à un événement avec plusieurs issues, on multiplie ajoute les probabilités de chaque branche concernée par l'événement.

$$P(\text{« Il fera Sec Jeudi »})=P(\text{« Il fera Sec Mercredi et Jeudi »})+P(\text{« Il fera Humide Mercredi et Sec Jeudi »})$$
$$=\frac{25}{36}+\frac{1}{18}=\frac{25}{36}+\frac{2}{36}=\frac{27}{36}$$

Proportionnalité : (reconnaître une situation de proportionnalité, calcul de la quatrième proportionnelle par retour à l'unité et produit en croix et coefficient de proportionnalité, représentation graphique, tableau, pourcentage, augmentation diminution, homothétie)

I. Définitions

Définition : **Un tableau est de proportionnalité** si pour passer de la première ligne à la seconde ligne, on multiplie toujours par le même nombre, ce nombre est alors appelé **coefficient de proportionnalité**.
On dira que les deux grandeurs, correspondant à chaque ligne, sont proportionnelles.

Exemple : À une station-essence, le sans-plomb 98 est vendu à 1,34€ le litre. La quantité d'essence et le prix sont donc proportionnels.
On a donc un tableau de proportionnalité :

Coefficient de proportionnalité

Quantité d'essence (L)	1	17	20,5	30
Prix (€)	1,34	22,78	27,47	40,2

×1,34

II. Compléter un tableau de proportionnalité.

Exemple pour expliquer les méthodes.

Voici un tableau de proportionnalité à remplir.

Temps (*h*)	4	6	10
Distance parcourue(*km*)	10		

1) Par passage à l'unité.

En 4 heures, nous parcourons 10 km.
En 1 heure, nous parcourrons donc 4 fois moins de distance à savoir $10:4=2{,}5\,km$
En 6 heures, nous parcourrons donc 6 fois plus de temps qu'en 1 heure à savoir $2{,}5\times 6=15\,km$
En résumé :

:4 ×6

Temps (*h*)	4	1	6	10
Distance parcourue (*km*)	10	2,5	15	

2) Avec le coefficient de proportionnalité

On cherche par quel nombre on multiplie 4 pour obtenir 10. $4\times\ldots=10$ C'est le nombre $\frac{10}{4}=2{,}5$

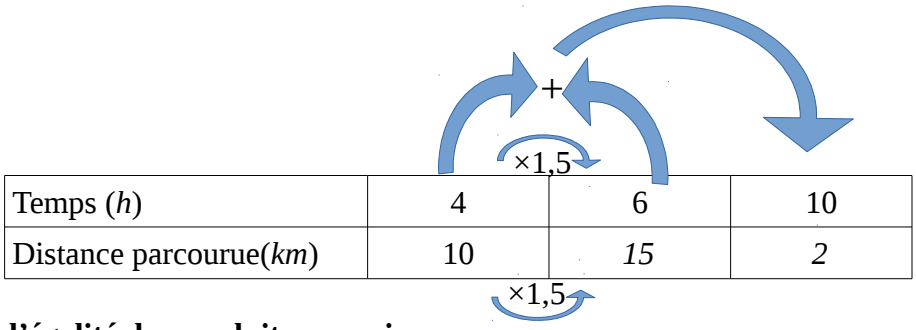
$6\times 2{,}5=15$

Temps (*h*)	4	6
Distance parcourue(*km*)	10	15

×2,5

3) En utilisant les propriétés du tableau de proportionnalité :

À savoir :	- multiplier/diviser une colonne par un nombre - ajouter/soustraire des colonnes entre elles.



Temps (h)	4	6	10
Distance parcourue(km)	10	*15*	*2*

4) En utilisant l'égalité des produits en croix.

Temps (h)	4	6
Distance parcourue(km)	10	a

Je nomme a le nombre cherché.
Le tableau est de proportionnalité donc
les produits en croix sont égaux.

$4\times a=10\times 6$

$4\times a=60$

$a=\frac{60}{4}=15$

J'aurais pu écrire directement $a=\frac{10\times 6}{4}=15$

IV. Sur un plan.

Définition : Sur un plan, les **longueurs** sont **proportionnelles** aux **longueurs réelles**. Le coefficient permettant de passer des longueurs réelles aux longueurs du plan (dans la même unité de mesure) s'appelle **l'échelle du plan**.

Exemple : Ici la carte ci-contre est à **l'échelle 1/5000** (ou $\frac{1}{5000}$).

Cela signifie que les longueurs réelles sont 5 000 fois plus grandes que sur le plan.

En effet,1 cm sur le plan équivaut à 5000 cm dans la réalité, soit 50m.

V Les pourcentages

Définition : Un pourcentage de t % traduit une proportion de $\frac{t}{100}$. Appliquer un taux de t% à une quantité revient à calculer $\frac{t}{100}$ de cette quantité.

Exemple : Dans une classe de 30 élèves, 20 % ont pris l'option Latin.
Je vais donc calculer $\frac{20}{100}$ de 30 : $\frac{20}{100}\times 30=0{,}2\times 30=6$. **6 élèves ont pris Latin.**

Définition : Déterminer un pourcentage revient à donner la proportion **dont le dénominateur est 100.**

Exemple : Un manteau coûtait 146€ et a augmenté de 29,2 €. Quel est le pourcentage d'augmentation?

La proportion de l'augmentation est de $\frac{29{,}2}{146}$. Or $\frac{29{,}2}{146}=0{,}2=\frac{20}{100}=20\,\%$

Le manteau a augmenté de 20%.

On peut aussi utiliser un tableau de proportionnalité :

Augmentation (€)	29,2	20
Prix (€)	146	100

×5

Propriété : **Augmenter** un nombre de p% revient à le **multiplier** par $\left(\mathbf{1+\frac{p}{100}}\right)$

Diminuer un nombre de p% revient à le **multiplier** par $\left(\mathbf{1-\frac{p}{100}}\right)$

Exemples : Les tarifs d'électricité vont augmenter chaque année de 6%. La famille DUDU payait 108€ d'électricité par an, dans 2 ans combien paiera-t-elle?

Dans 1 an : $108\times\left(1+\frac{6}{100}\right)=114{,}48$

Dans 2 ans : $114{,}48\times\left(1+\frac{6}{100}\right)=121{,}3488\,€$

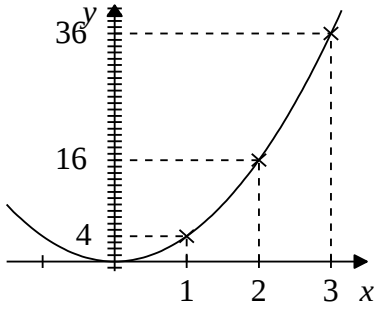
J'aurais pu écrire directement : $108\times\left(1+\frac{6}{100}\right)\times\left(1+\frac{6}{100}\right)=121{,}3488\,€$.

Le prix du gaz a baissé de 3%. La famille DUDU payait 86€ par an. Combien va-t-elle payer?

$86\times\left(1-\frac{3}{100}\right)=83{,}42$

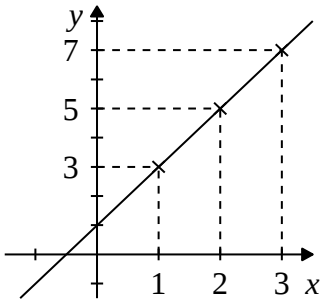
VI Caractérisation graphique de la proportionnalité

Propriété : Si une situation est une situation de proportionnalité, alors les points de sa représentation graphique sont alignés avec l'origine du repère.



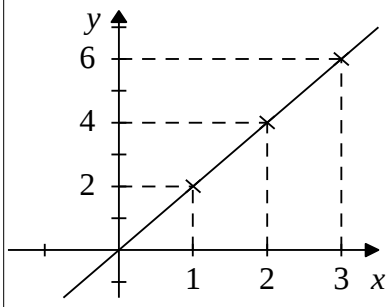
Les points de la représentation **ne sont pas alignés.**

La situation n'est pas une situation de proportionnalité



Les points de la représentation **ne sont pas alignés avec l'origine du repère.**

La situation n'est pas une situation de proportionnalité



Les points de la représentation **sont alignés avec l'origine du repère.**

La situation est une situation de proportionnalité

Fonctions (notion de, vocabulaire, variable, notation, graphique)

I. Notion de fonction

Définition : Une fonction f permet d'associer à un nombre x, un nombre unique transformé que l'on note $f(x)$.

Exemple : La « machine » qui à un nombre fait correspondre la moitié de celui-ci augmentée de 1 est une fonction.

Au nombre initial 5, je trouverai le nombre transformé 3,5. ($\frac{5}{2}+1=3{,}5$)

Au nombre initial -2 , je trouverai 0 ($\frac{-2}{2}+1=0$)

On peut résumer ces résultats dans un **tableau de valeurs**

x (nombre initial)	5	-2	6	10
$f(x)$ (nombre transformé)	3,5	0	4	6

Ici, de façon générale au nombre initial x, le nombre transformé associé est $\frac{x}{2}+1$

Notation :
Appelons g la fonction qui à un nombre fait correspondre la moitié de lui-même augmentée de 1.

On notera que $\underbrace{g:5 \mapsto 3{,}5}_{}$ ou $\underbrace{g(5)=3{,}5}_{}$

Cela se lit « La fonction g associe 5 à 3,5 » « g de 5 égal 3,5»

On définit la fonction **On définit le nombre transformé g(3,5)**

Pour définir la fonction g, écrira également :

$\underbrace{g:x \mapsto \frac{x}{2}+1}_{}$ ou $\underbrace{g(x)=\frac{x}{2}+1}_{}$

Cela se lit « La fonction g associe x à $\frac{x}{2}+1$ » « g de x égal $\frac{x}{2}+1$ »

II. Vocabulaire

Cette fonction g, au nombre 6 fait correspondre le nombre 4 ($\frac{6}{2}+1=4$).

Vocabulaire
On dit que **l'image** de 6 par la fonction g est 4. Cette **image** est unique.
On dit que **l'antécédent** de 4 par la fonction g est 6.

6 est l'antécédent de 4

$g: 6 \mapsto 4$

4 est l'image de 6

Exemple :
Soit le tableau de valeurs de la fonction h, définie par $h(x)=x^2-3$

...a pour antécédent...

x	-3	-1	0	1
$h(x)$	6	-2	-3	-2

...a pour image...

L'image de -3 est 6, l'image de -1 est -2.
L'antécédent de -3 est 0. Les antécédents de -2 sont 1 et -1.

Remarque : Il n'y a qu'une seule image par nombre, mais il peut y avoir plusieurs antécédents.

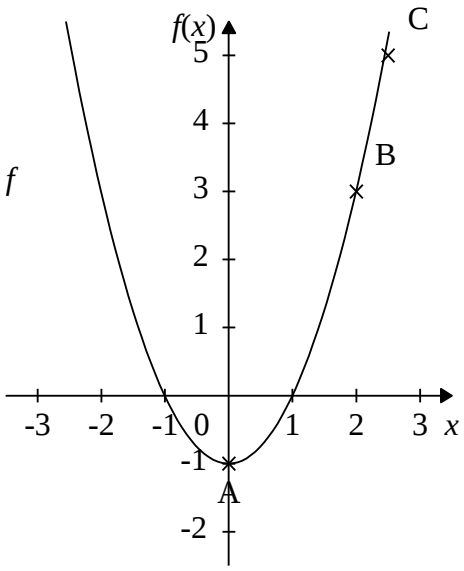
III.Représentation graphique :

Définition Dans un repère, **la courbe représentativ**e, ou représentation graphique , d'une fonction f est formée de tous l**es points M de coordonnées** $(x;y)$ **avec** $y=f(x)$. Les coordonnées de M sont de la forme $(\boldsymbol{x;f(x)})$

Exemple
Soit la fonction $f: x \mapsto x^2-1$

Dans un repère, la courbe représentative de f est constituée de points de coordonnées $(x;f(x))$ où $f(x)=x^2-1$.
Le point A de coordonnées $(0;-1)$ appartient à la courbe de f en effet $f(0)=-1$.
B de coordonnées $(2;3)$ appartient à la courbe f car $f(2)=2^2-1=4-1=3$.

Le point C de coordonnées $(2{,}5;5)$ n'appartient pas à la courbe représentative de f car $f(2{,}5)=2{,}5^2-1=6{,}25-1=5{,}25\neq 5$



III. Fonction linéaire

Définition : Une fonction f est dite **linéaire** si elle est définie par une formule du type :

$$f : x \mapsto ax$$

où a est un nombre connu appelé **coefficient linéaire.**

Exemple : La fonction g définie par $g(x)=2x$ ou $g : x \mapsto 2x$ est une fonction linéaire de coefficient 2 .

Propriété : **Le tableau de valeurs** d'une fonction linéaire est un tableau de proportionnalité donc le coefficient linéaire est le coefficient de proportionnalité.

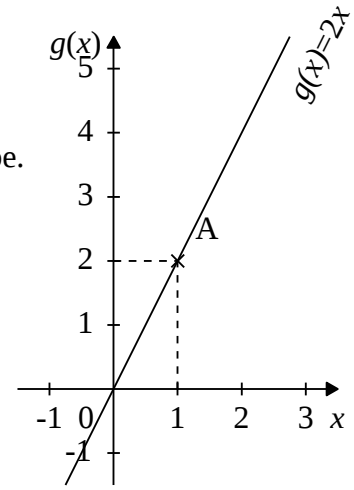
Exemple : La fonction g définie par $g(x)=2x$ ou $g : x \mapsto 2x$ a pour tableau de valeurs :

x	-3	0	4
$g(x)$	-6	0	8

×2

Conséquence : La **représentation graphique** d'une fonction **linéaire** est une droite passant par **l'origine** du repère.

Pour tracer une fonction linéaire, il suffit seulement de placer un point de la courbe. Ici le point $A(1;2)$ appartient à la courbe. En effet $g(1)=2\times1=2$.



IV. Fonction affine

Définition : Une fonction f est dite affine si elle est définie par une formule du type :

$$f : x \mapsto ax+b$$

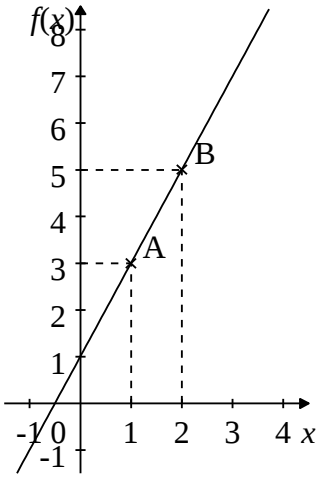
où a est un nombre connu appelé **coefficient directeur.**
et b est un nombre connu appelé **ordonnée à l'origine.**

Exemple : La fonction h définie par $h(x)=2x+1$ ou $h : x \mapsto 2x+1$ est une fonction affine.

Cas particuliers : -Une fonction affine $f : x \mapsto ax+b$ est linéaire si b= 0 car on a $f : x \mapsto ax$
-Une fonction affine $f : x \mapsto ax+b$ est constante si a= 0 car on a $f : x \mapsto b$

Propriété : La **représentation graphique** d'une fonction **affine** est une droite

Pour tracer une fonction affine, il suffit seulement de placer deux points de la courbe. Ici le point $A(1;3)$ appartient à la courbe.
En effet $h(1)=2\times1+1=3$
et B(2;5) appartient également à la courbe.
$h(2)=2\times2+1=5$

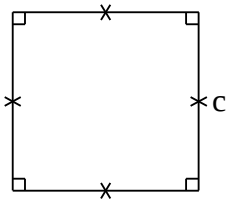
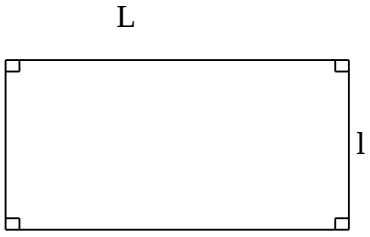
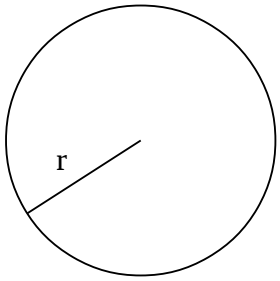


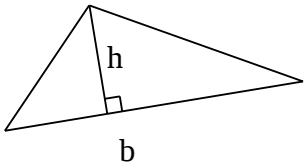
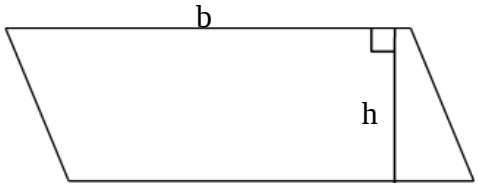
Propriété sur les accroissements.
F est une fonction affine de la forme $f : x \mapsto ax+b$. Soient deux nombres différents x_1 et x_2 alors $\boldsymbol{a}=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

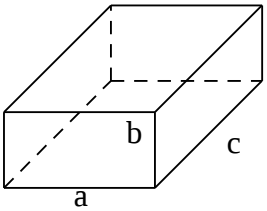
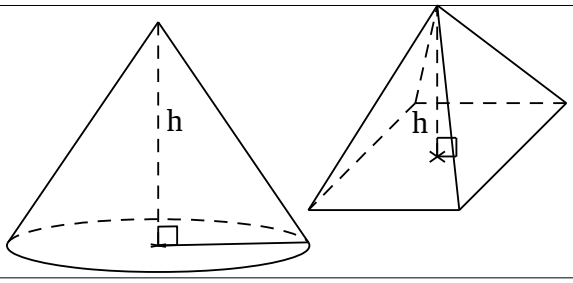
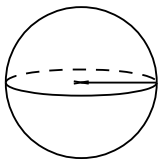
Exemple d'application : Soit g une fonction affine telle que $g(2)=5$ et $g(6)=8$. Alors le coefficient directeur a est donné par $a=\dfrac{g(2)-g(6)}{2-6}=\dfrac{5-8}{2-6}=\dfrac{-3}{-4}=0{,}75$.
La fonction g est de la forme $g(x)=0{,}75x+b$

Grandeurs et mesures

Calcul d'aire, de volume

		
Périmètre d'un carré $4c$	Périmètre d'un rectangle $L+l+L+l=2L+2l$	Longueur du cercle $\pi\times 2\times r$ ou $\pi\times D$
Aire d'un carré c^2	Aire d'un rectangle $L\times l$	Aire d'un disque $\pi\times r^2$

	
Aire d'un triangle $\frac{b\times h}{2}$	Aire d'un parallélogramme $b\times h$

		
Volume d'un pavé droit $a\times b\times c$	Volume d'une pyramide ou cône de révolution $\frac{B\times h}{3}$ où **B est l'aire de la base**.	Volume d'une boule $\frac{4}{3}\pi r^3$ Aire de la sphère $4\pi r^2$

Agrandissement et réduction

I.Définition

Définition :

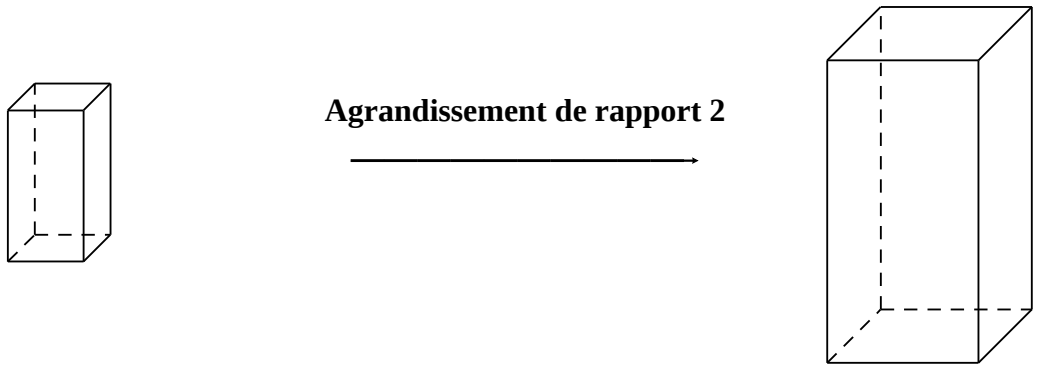
On dit que la figure a été agrandie **d'un rapport k**, si toutes les longueurs de la figure ont été **multipliées par k et k>1.**
On dit que la figure a été réduite **d'un rapport k**, si toutes les longueurs de la figure ont été **multipliées par k et k<1.**

II.Conséquences et propriétés

Propriété : Si une figure a été agrandie ou réduite d'un rapport k, alors les aires de la **figure** sont multipliées par **k²** et le **volume** par **k³**.

Propriété : Après une réduction ou un agrandissement, les angles ne varient pas.

Exemples :



	Longueurs	
Hauteur : 2cm **Largeur : 1 cm** **Profondeur 0,5cm**	$\xrightarrow{\times 2}$	**Hauteur : 4cm** **Largeur : 2 cm** **Profondeur 1cm**
	Aire face de devant	
Aire : $2\times1=2\,cm^2$	$\xrightarrow{\times 2^2}$	**Aire :** $4\times2=8\,cm^2$
	Volume	
Volume : $2\times1\times0{,}5=1\,cm^3$	$\xrightarrow{\times 2^3}$	**Volume :** $4\times2\times1=8\,cm^3$

Exemple : Une pyramide est réduite d'un rapport $\frac{1}{4}$. Sa base est un rectangle de dimension de 4m par 5m. Sa hauteur est de 3 m.
Pour trouver le volume de la pyramide réduite, je peux d'abord calculer le volume de la pyramide initiale : $\frac{4\times5\times3}{3}=20\,m^3$ puis multiplier ce résultat par $\left(\frac{1}{4}\right)^3$: $20\times\left(\frac{1}{4}\right)^3=0{,}3125\,m^3$

Espace et géométrie

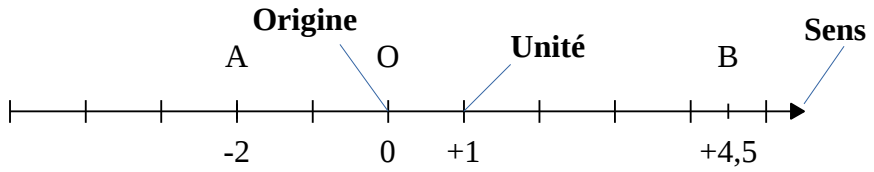
Repérage

I.Repérage sur un axe

Définition : Une droite graduée est une droite qui contient un point nommé **Origine**, un autre appelé Unité et un sens.

Définition : Sur une droite graduée, chaque point est repéré par un nombre relatif. On dit que ce nombre est l'abscisse de ce point.

Exemple :



Voir vidéo exercice traité Sur mathix http://mathix.org/

L'abscisse de A est (-2), on le note A(-2). B a pour abscisse +4,5, on écrit donc B(+4,5).

Remarque : L'origine de la droite graduée a pour abscisse 0.

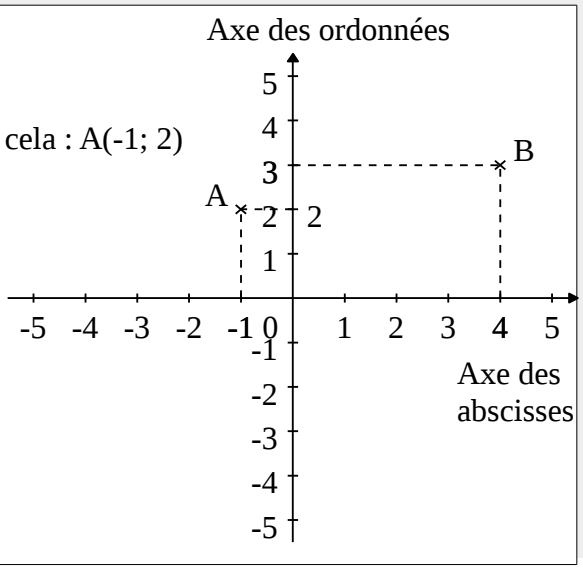
II. Repérage dans un plan.

Définition : Un **repère orthogonal** du plan est composé de deux droites graduées perpendiculaires et de même origine. L'une horizontale est appelée **axe des abscisses** et l'autre verticale est appelée **axe des ordonnées**.

Définition : Chaque point est repéré par deux nombres appelées **coordonnées** du point. Le premier nombre est **l'abscisse du point** et le second **l'ordonnée**.

Exemple :

Ici, A a pour abscisse -1 et ordonnées 2.
On dit que les **coordonnées** de A sont **(-1; 2)**. On note cela : A(-1; 2)
B a pour **abscisse 4** et **ordonnées 3**.
On dit que les coordonnées de B sont (4; 3).
On note cela : **B(4; 3)**

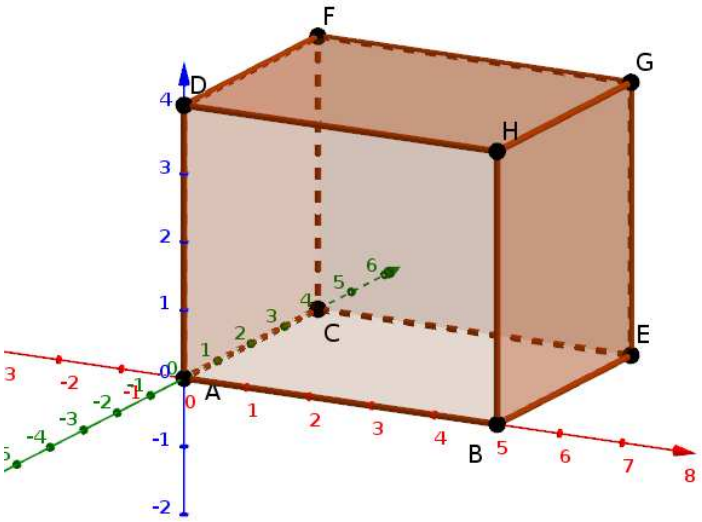


III Repérage dans l'espace

Propriété : On peut se repérer dans un parallélépipède rectangle, en prenant un de ses sommets comme origine et en notant l'abscisse et l'ordonnée sur la base du pavé droit et l'altitude sur le troisième côté.
Cela forme 3 axes : abscisse, ordonnée et altitude qui permettront de repérer les points à l'aide de triplet.

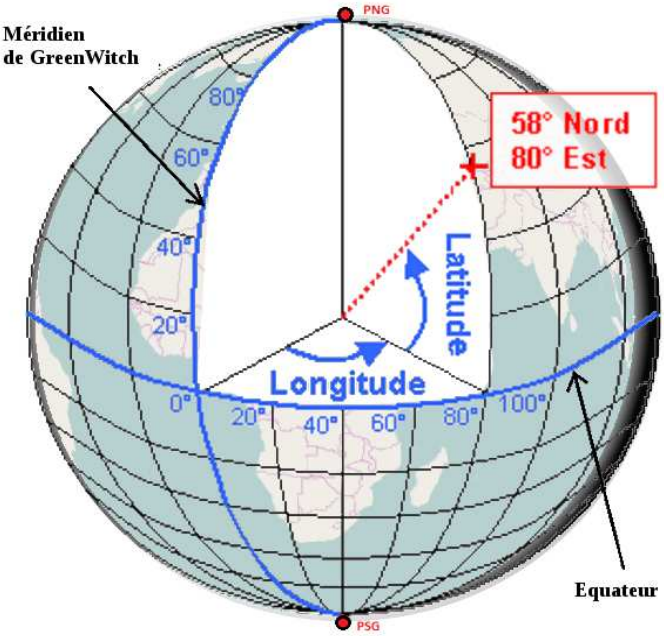
Exemple : ici, on choisit de prendre :
(AB) comme axe des abscisses
(AC) comme axe des ordonnées
(AD) comme axe des altitudes.

Les triplets de chaque point sont :
A (0;0;0) c'est l'origine.
B (5;0;0)
E (5;4;0)
F (0;4;4)



IV.Repérage sur une sphère

Sur Terre que l'on assimile à une sphère, on peut se repérer grâce à deux coordonnées qui sont rattachées à deux grands cercles, le premier est l'équateur et le second le méridien de Greenwich.
Ces coordonnées sont appelées respectivement **Longitude et Latitude.**

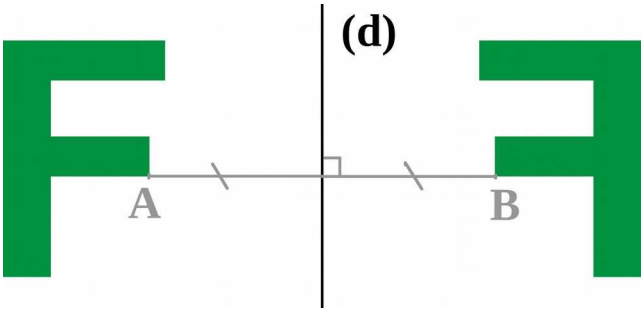


Symétrie axiale et centrale (médiatrice)

I.Symétrie axiale

Définition : Deux figures sont **symétriques par rapport à une droite (d)**, signifie que **les figures se superposent par pliage le long de la droite (d).**
La droite (d) est appelée **axe de symétrie.**

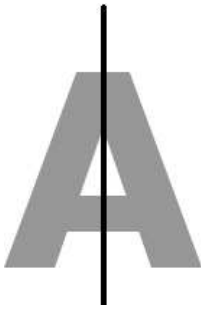
Propriété/Définition :
Deux points A et B sont symétriques par rapport à une droite (d), si la droite (d) est la **médiatrice du segment [AB].**



Définition : Une droite (d) est un axe de symétrie d'une figure si le symétrique de la figure par rapport à la droite (d) est elle-même.

Exemple :

Voici l'axe de symétrie de la figure.

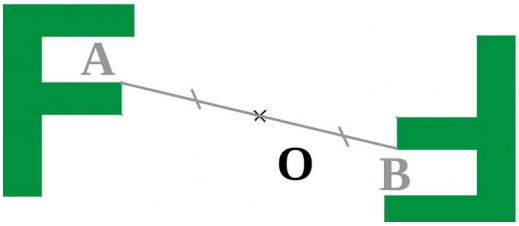


Propriété : La symétrie axiale conserve les angles, les mesures et les natures des figures.

II. Symétrie centrale.

Définition : Deux figures sont **symétriques par rapport à un point O** signifie que **les figures se superposent par un demi-tour autour de ce point.**
Le point O est appelée **centre de symétrie.**

Propriété/Définition :
Deux points A et B sont symétriques par rapport au point O, si le point O est le **milieu du segment [AB].**



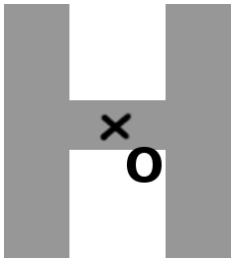
Propriété : La symétrie centrale conserve les angles, les mesures et les natures des figures.

Propriété : Le symétrique d'un segment (droite) est un segment (droite) qui lui est parallèle.

Définition : Un point O est un centre de symétrie d'une figure si le symétrique de la figure par rapport à ce point est elle-même.

Exemple :

Voici le centre de symétrie de la figure.



Propriété du triangle (angle, inégalité triangulaire, hauteur médiatrice, semblables)

I.Somme des angles

Propriété : La somme des angles d'un triangle vaut 180°.

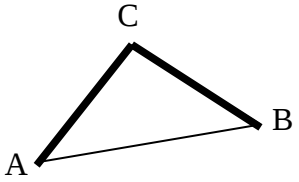
Conséquence :
- Les angles d'un triangle équilatéral mesurent 60°.
- Les angles de la base d'un triangle isocèle ont la même mesure.
- La somme des angles aigus d'un triangle rectangle vaut 90°

II. Inégalité triangulaire.

« *Le plus court chemin entre deux points est la ligne droite, donc tout autre chemin qui passe par un 3e point est plus long.* »

Propriété : Dans tout triangle ABC, on a l'inégalité :

$AB \leqslant$ **AC+CB**



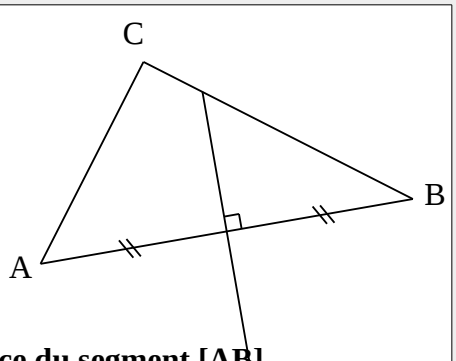
Propriétés : Si un point C est sur le segment [AB] alors AB = AC+BC « *cas d'égalité* »
Si 3 points sont tels que AB= AC+BC alors on peut affirmer que C appartient à [AB].

III. Droites remarquables

Médiatrice

Définition : **La médiatrice d'un côté d'un triangle** est la droite qui passe perpendiculairement par le milieu de ce côté.

Exemple :



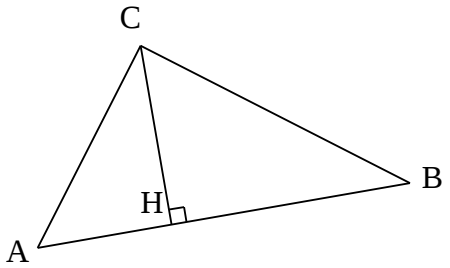
La médiatrice du segment [AB]

Propriété : Si un point I se trouve sur la médiatrice de [AB] alors AI=IB
Si I est un point tel que AI=IB alors I est sur la médiatrice de [AB]

Hauteur

Définition : **La hauteur d'un triangle** est la droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.

Exemple :



La hauteur issue de C. (H est appelé pied de la hauteur)

IV.Construction d'un triangle :

Voir vidéo exercice traité sur mathix http://mathix.org/

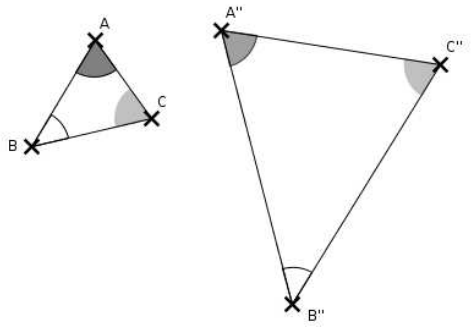
On ne peut construire un triangle si et seulement si :
- on connaît les 3 côtés du triangle (construction au compas)
- un angle et deux côtés ou 2 angles et 1 côté. (construction au rapporteur)

V. Triangles semblables.

Définitions : Deux triangles sont **semblables** ou **de même forme** s'ils sont leurs angles deux à deux égaux.

Exemple :

Les deux triangles suivants sont semblables car angles de même couleur sont de même mesure.



Propriété : Si deux triangles sont semblables alors les longueurs des côtés opposés aux angles égaux sont **proportionnelles**. Les côtés réunis par paire sont appelés homologues.

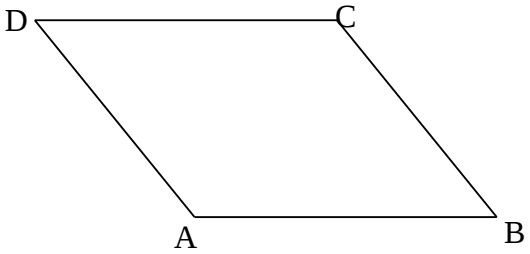
Exemple : Dans l'exemple précédent, ABC et A''B''C'' sont semblables donc :
$\frac{AB}{A''B''}=\frac{AC}{A''C''}=\frac{BC}{B''C''}=k$ où k est le coefficient d'agrandissement ou de réduction.

Propriété : Si deux triangles ont les longueurs de leurs côtés opposés **proportionnelles alors ils sont semblables.**

Propriété du parallélogramme

I. Définition-propriété

Définition : Un **parallélogramme** est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.



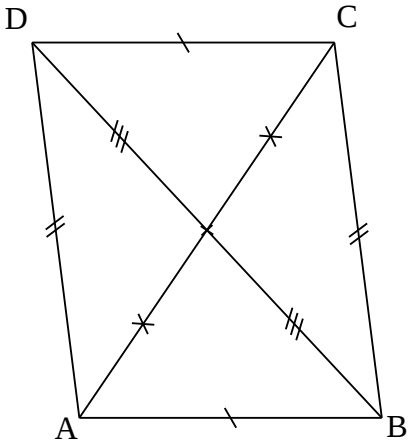
Propriétés : Si un quadrilatère est un parallélogramme alors :
- ses côtés opposés sont de même mesure

- il possède un centre de symétrie (croisement des diagonales)

- les diagonales se coupent en leur milieu.

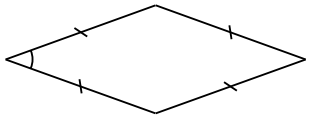
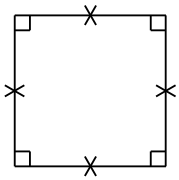
- ses angles opposés sont de même mesures

- la somme de deux angles consécutifs vaut 180°

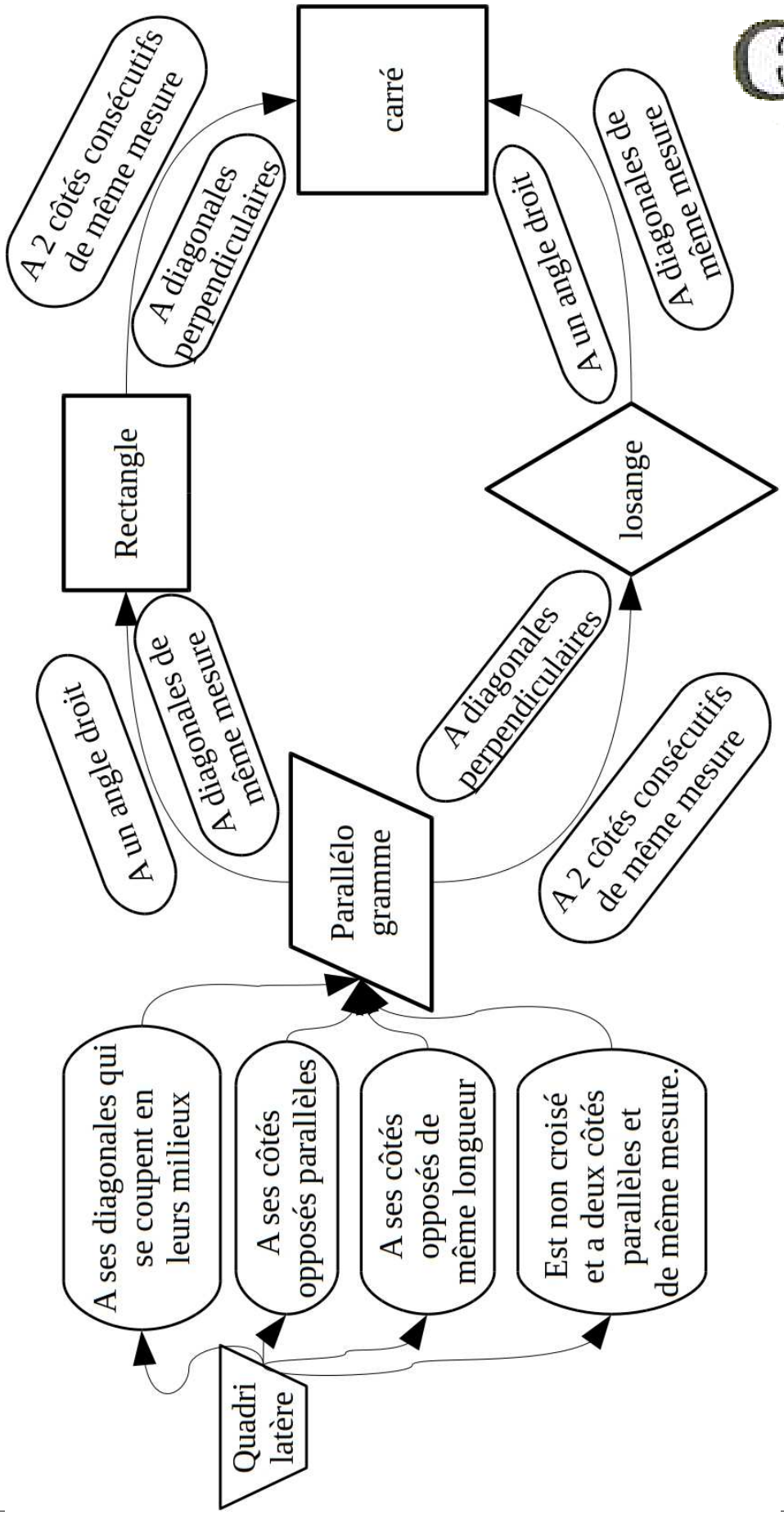


II. Parallélogrammes particuliers.

Le rectangle, losange et carré sont des parallélogrammes particuliers, ils ont donc les propriétés du parallélogramme.

Le rectangle	Le losange	Le carré
Un rectangle est un quadrilatère qui a 4 angles droits	Le losange est un quadrilatère qui a 4 côtés de même mesure. 	Le carré est un quadrilatère qui a 4 côtés de même mesure et 4 angles droits. 
Propriété : Ses diagonales sont de même longueurs.	**Propriété** : Ses diagonales sont perpendiculaires.	**Propriété** : Ses diagonales sont perpendiculaires et de même longueur.

III. Du quadrilatère aux parallélogrammes puis aux parallélogrammes particuliers.

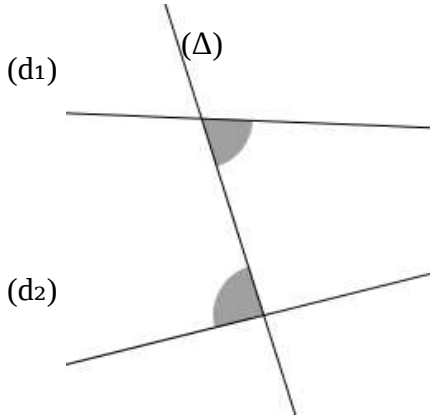


Parallélisme (alterne-interne)

I. Angles alternes-internes.

Définition : Soit deux droites (d_1) et (d_2) coupées par une sécante (Δ).
Deux angles formés par ses 3 droites sont **alternes-internes** si et seulement si :
- Ils n'ont pas le même sommet.
- Ils sont de part et d'autre de la sécante (Δ)
- Ils sont à l'intérieur de la bande définie par (d_1) et (d_2)

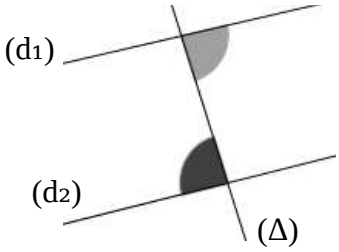
Exemple :
Les angles gris sont alternes-internes.



II. Propriétés.

Propriété : Si deux droites coupées par la sécante sont parallèles, alors les angles alternes-internes sont égaux.

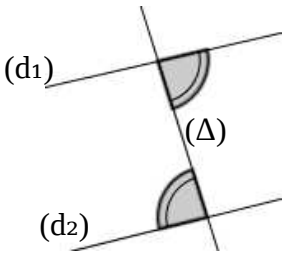
Exemple :
Les deux droites (d_1) et (d_2) sont parallèles, donc les deux angles gris sont égaux.



Propriété : Si deux angles alternes-internes sont égaux alors les droites coupées par la sécante sont parallèles.

Exemple :

Les deux angles alternes-internes sont égaux, donc les droites (d_1) et (d_2) sont parallèles.



Triangle rectangle : Égalité de Pythagore

I.Définition-Vocabulaire

Définition :
Dans un triangle rectangle, **l'hypoténuse** est le côté du triangle opposé à l'angle droit.

Remarque : L'hypoténuse est toujours le côté le plus long.

II.Théorème & Application

Théorème de Pythagore
Si un triangle est rectangle , alors le carré de la longueur de son hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

Exemple :
Soit le triangle ABC rectangle en A ([BC] est donc l'hypoténuse),
alors $BC^2=AC^2+BA^2$.

Exemple d'application :
Soit DEF un triangle rectangle en E , EF=5 et FD =13 , que vaut la mesure de [DE]?

On sait que le triangle DEF est rectangle en E . [DF] est l'hypoténuse.
D'après le théorème de Pythagore, on a :

$FD^2=EF^2+DE^2$
Or $FD=13$ et $EF=5$
Donc : $13^2=5^2+DE^2$
$169=25+DE^2$
$144=DE^2$
$DE=12$ Pour trouver la longueur de DE, il faut chercher le nombre positif qui au carré vaut 144.
Or $12^2=12\times12=144$ donc DE=12.

Remarque : Le théorème de Pythagore sert à calculer une longueur lorsque l'on connaît 2 côtés.

III.Racine carrée

Définition : Soit un nombre a **positif**. $\sqrt{a}$ est le nombre **positif** dont le carré vaut a.
Dans l'exemple précédent $DE^2=144$ donc $DE=\sqrt{144}$ (qui est égal à 12).
Autre exemple : $5^2=25$ donc $\sqrt{25}=5$.

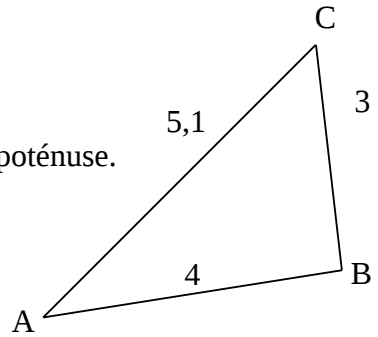
Définition : On appelle **carré parfait** , un nombre entier positif dont la racine carrée est entière.

Carré parfait	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144
Racine carrée associée	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

IV.Déterminer si le triangle est rectangle ou non.

L'égalité de Pythagore permet de savoir si un triangle est rectangle ou non.

Exemple d'application :
Soit un triangle ABC tel que AB=4 , BC =3 et AC=5,1.
Le triangle est-il rectangle?



On sait que [AC] est le côté le plus long donc pourrait être l'hypoténuse.
Calculons d'une part AC^2 et d'autre part AB^2+CB^2.

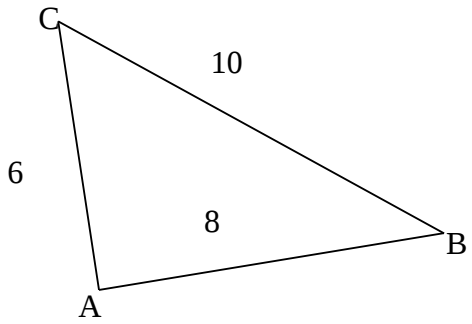
$AC^2=5{,}1^2=26{,}01$

$AB^2+CB^2=4^2+3^2=16+9=25$

Donc $AC^2 \neq AB^2+CB^2$

L'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée donc le triangle n'est pas rectangle.

Exemple d'application :
Soit un triangle ABC tel que AB=8 , BC =10 et AC=6.
Le triangle est-il rectangle?



On sait que [BC] est le côté le plus long donc pourrait être l'hypoténuse.
Calculons d'une part BC^2 et d'autre part AB^2+CA^2.

$BC^2=10^2=100$

$AB^2+CA^2=8^2+6^2=64+36=100$

Donc $BC^2=AB^2+CA^2$

L'égalité de Pythagore est vérifiée donc le triangle est rectangle en A.

Remarque : L'égalité de Pythagore permet de montrer si un triangle est rectangle ou non

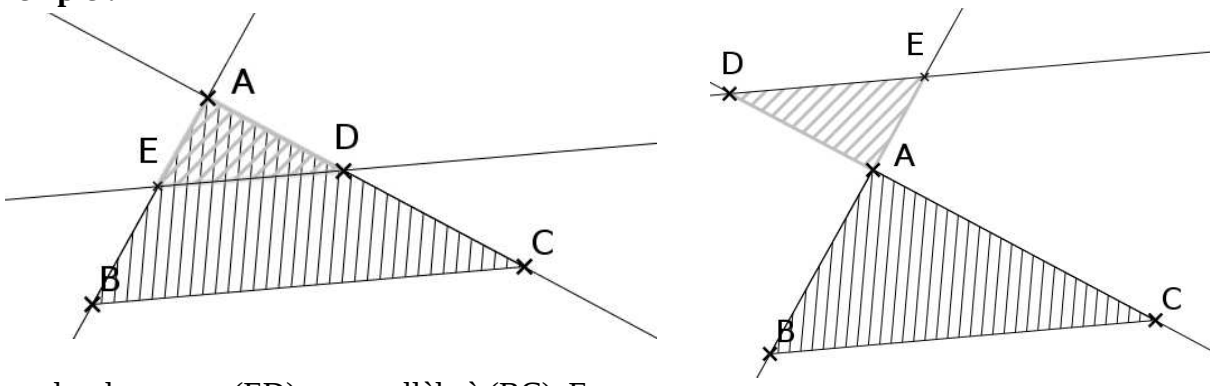
Théorème et réciproque du théorème de Thalès

I.Théorème

Théorème de Thalès : Si, deux droites parallèles coupent deux droites sécantes alors elle détermine deux triangles dont les côtés correspondants ont des longueurs proportionnelles.

Remarque : Cela revient à dire que les triangles formés sont semblables.

Exemple :



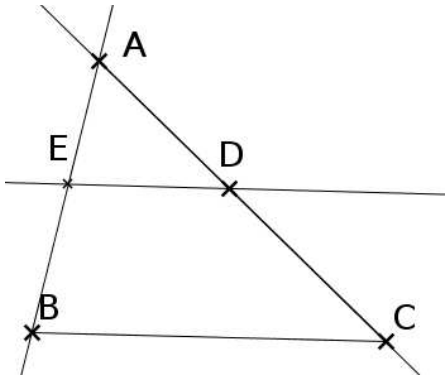
Dans les deux cas : (ED) est parallèle à (BC), E appartient à (AB) et D appartient à (AC), d'après le théorème de Thalès, on a :

$\frac{AD}{AC}=\frac{AE}{AB}=\frac{ED}{BC}$ Côtés du triangle AED

Côtés du triangle ABC

Application :

Soit la configuration suivante.
On donne AD=3 cm, AC=5 cm, AE=4cm et BC=4cm.
Calculer AB et ED.



On sait que : - D appartient à (AC)
- E appartient) (AB)
-(ED) et (BC) sont parallèles.

D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AD}{AC}=\frac{AE}{AB}=\frac{ED}{BC}$$

D'où $\frac{3}{5}=\frac{4}{AB}=\frac{ED}{4}$ en utilisant l'égalité des produits en croix,(voir chapitre fraction et quotient)

on a :

$3\times AB=4\times 5$

$3\times AB=20$

$AB=\frac{20}{3}$

$3\times 4=5\times ED$

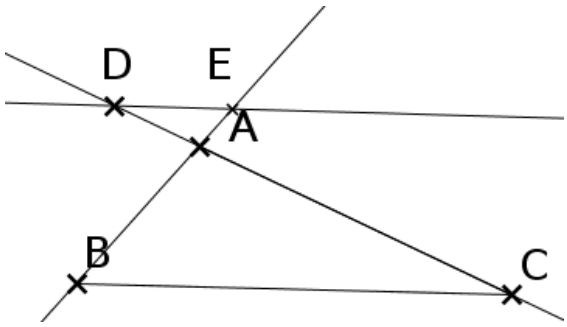
$12=5\times ED$

$ED=\frac{12}{5}=2{,}4$

(J'aurais pu écrire directement $AB=\frac{4\times 5}{3}=\frac{20}{3}$ et $ED=\frac{3\times 4}{5}=2{,}4$)

Remarque : Le théorème de Thalès permet aussi de montrer que deux droites ne sont pas parallèles (par l'absurde) en montrer qu'il n'y a pas d'égalité, on parlera de conséquence du théorème de Thalès.

Exemple :
Soit la configuration suivante :
On donne AD=4cm et AC=10cm, AE=2 cm, DE=3cm et BC=7cm.
Montrer que les droites (DE) et (BC) ne sont pas parallèles.



On a d'une part $\frac{AD}{AC}=\frac{4}{10}$ et d'autre part $\frac{DE}{BC}=\frac{3}{7}$

$3\times10=30$ et $7\times4=28$ donc les produits en croix ne sont pas égaux,

donc $\frac{AD}{AC}=\frac{AE}{AB}$.

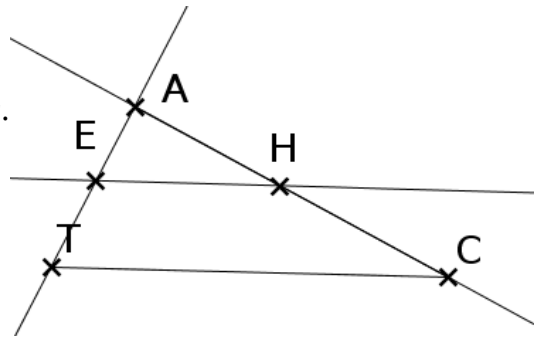
D'après la conséquence du théorème de Thalès, les droites (DE) et (BC) ne sont pas parallèles.

II.Réciproque du théorème

Réciproque du théorème de Thalès : Si, d'une part les points A,D,C et d'autre part les points A,E,B **sont alignés dans le même ordre** et si **les deux premiers rapports de Thalès sont égaux** ($\frac{AD}{AC}=\frac{AE}{AB}$) alors les droits (DE) et (BC) sont parallèles.

Remarque la réciproque du théorème de Thalès permet **uniquement de montrer que deux droites sont parallèles.**

Exemple d'application :
Soit la figure suivante.
AH=4cm AC=5cm AE=6cm et AT=7,5cm.
Montrer que les droites (EH) et (TC) sont parallèles.



On a d'une part $\frac{AH}{AC}=\frac{4}{5}$ et d'autre part $\frac{AE}{AT}=\frac{6}{7,5}$

$4\times7,5=30$
$6\times5=30$

Les produits en croix sont égaux donc $\frac{AH}{AC}=\frac{AE}{AT}$.

On sait également que les points A,H,C et A,E,T sont alignés dans le même ordre.
Donc d'après la réciproque du théorème de Thalès (EH) et (TC) sont parallèles.

Triangle rectangle : trigonométrie

I.Définitions

Le cosinus, le sinus et la tangente sont des outils qui permettent de calculer des longueurs et des mesures d'angles dans un triangle rectangle.

Définitions:

Le **cosinus** d'un angle est égal au rapport : $\dfrac{\textit{Longueur du côté adjacent à l'angle}}{\textit{longueur hypoténuse}}$

Le **sinus** d'un angle est égal au rapport : $\dfrac{\textit{Longueur du côté opposé à l'angle}}{\textit{longueur hypoténuse}}$

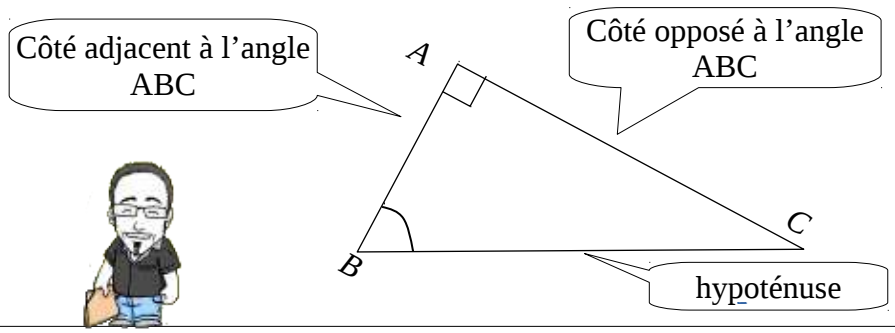
Le **tangente** d'un angle est égal au rapport : $\dfrac{\textit{Longueur du côté opposé à l'angle}}{\textit{Longueur du côté adjacent à l'angle}}$

Exemple :

$\cos(\widehat{ABC})=\dfrac{AB}{BC}$

$\sin(\widehat{ABC})=\dfrac{AC}{BC}$

$\tan(\widehat{ABC})=\dfrac{AC}{AB}$



Le cosinus et le sinus d'un angle aigu sont toujours compris entre 0 et 1.

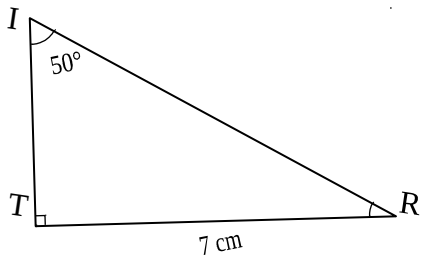
II.Applications

Exemple : Calculer une longueur

Calculer TI :

*On connaît le côté **opposé** à l'angle* $\widehat{TIR}$ *et on cherche son côté **adjacent.***

Donc on utilise le rapport tangente.



Le triangle TIR est rectangle en T, on a donc :

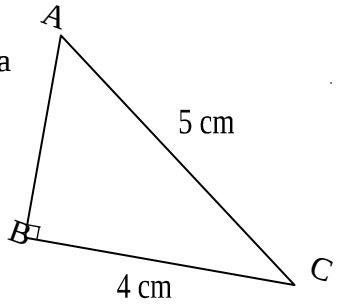
$\tan(\widehat{TIR})=\dfrac{TR}{TI}$ $\qquad$ $\tan(50^\circ)\times TI=1\times 7$

$\tan(50^\circ)=\dfrac{7}{TI}$ $\qquad$ $\tan(50^\circ)\times TI=7$

$\dfrac{\tan(50^\circ)}{1}=\dfrac{7}{TI}$ $\qquad$ $TI=\dfrac{7}{\tan(50^\circ)}\approx 5{,}87\,cm$

Exemple : Calculer la mesure d'un angle

Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$, arrondir au dixième près:



On cherche l'angle $\widehat{BAC}$ et on connaît le côté adjacent et opposé, on va utiliser le sinus.

On sait que ABC est un triangle rectangle en B, donc on a :

$\sin(\widehat{BAC})=\frac{BC}{AC}$

$\sin(\widehat{BAC})=\frac{4}{5}$

$\widehat{BAC}=\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)\approx 53{,}1°$

arcsin s'obtient en appuyant sur la touche « 2nde » puis « sin »

III.Propriétés

Propriété : Dans un triangle rectangle, quelle que soit la mesure *x* d'un angle aigu, on a :

$\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ ($x\neq 0$) et $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$ (*cos² (x) = (cos (x))²*)

Exemple : Calculer la valeur exacte d'un rapport trigonométrie

On sait que $\sin(x)=\frac{2}{3}$. Calculer la valeur exacte de cos *x*, *x* étant la mesure d'un angle aigu d'un triangle rectangle.

On sait que l'on a : $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$

donc $\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cos^2(x)=1$

$\frac{4}{9}+\cos^2(x)=1$

$\cos^2(x)=\frac{5}{9}$

$\cos(x)=\sqrt{\frac{5}{9}}$

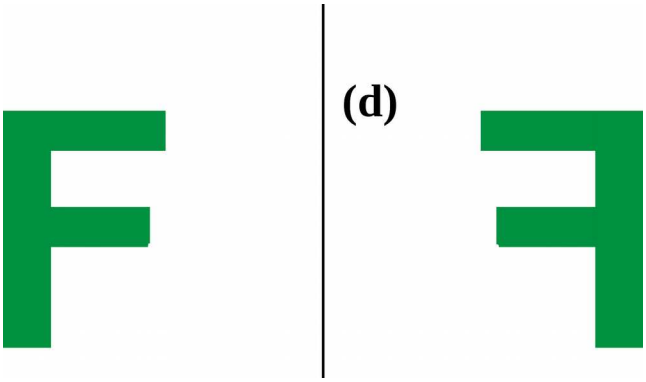
$\cos(x)=\frac{\sqrt{5}}{3}$

Transformations : translation, rotation, homothétie

I.Symétrie axiale :

Transformer une figure par une **symétrie axiale**, c'est créer l'image de cette figure par pliage le long de l'axe.

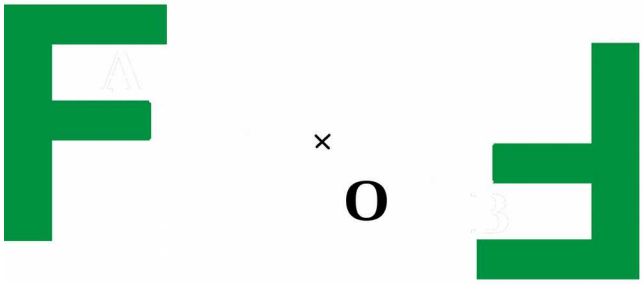
Voir chapitre symétrie axiale



Exemple : Voici le symétrique de la lettre F par rapport à la droite (d)

II.Symétrie centrale :

Transformer une figure par **symétrie centrale**, c'est créer l'image de cette figure par un demi-tour autour du centre.

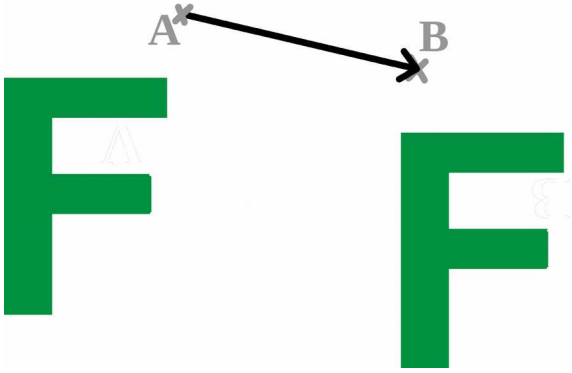


Exemple : Voici le symétrique de la lettre F par rapport au point O.

Voir chapitre symétrie centrale

III.Translation

Transformer une figure par **translation**, c'est créer l'image de cette figure par rapport à un glissement d'un point à un autre point.

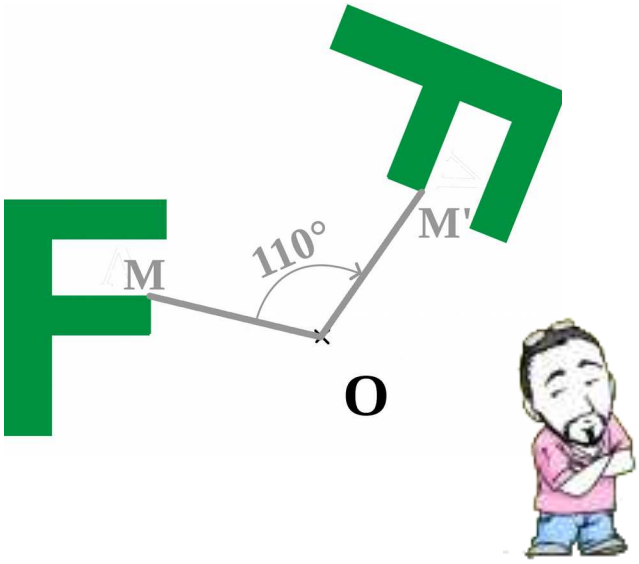


Exemple : Voici la translation de la lettre F par une glissement du point A vers le point B.

IV.Rotation

Transformer une figure par **rotation**, c'est créer l'image de cette figure par une rotation autour du centre suivant un angle donné.

Exemple : Voici la rotation de la lettre F par rapport au point O suivant un angle de 110°.

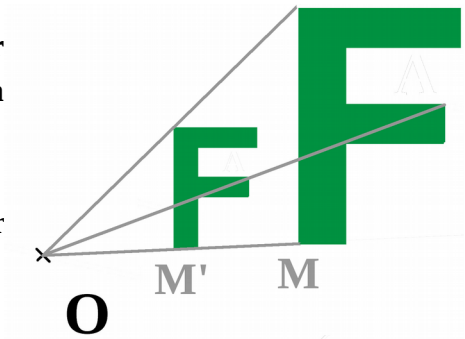


Remarque : La rotation autour d'un centre O d'un angle de 180° correspond à une symétrie centrale de centre O.

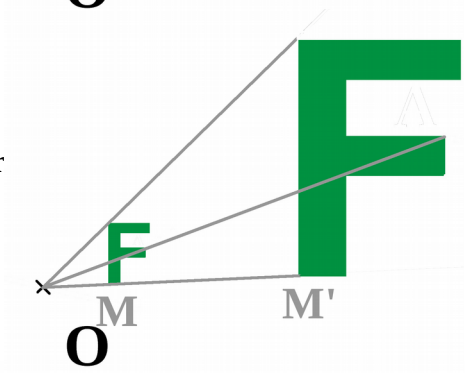
V.Homothétie.

Transformer une figure par homothétie, c'est créer l'image de cette figure par rapport à un centre et un rapport k.

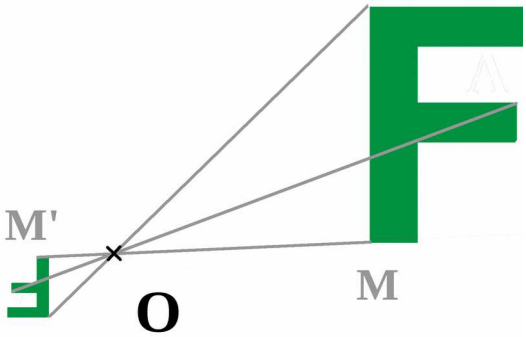
Exemple : Voici la transformation de la lettre F par homothétie de centre O et de rapport 0,5.
On a $OM = OM' \times 0{,}5$
O,M et M' sont alignés.



Exemple : Voici la transformation de la lettre F par homothétie de centre O et de rapport 4.
On a $OM = OM' \times 4$
O,M et M' sont alignés.



Exemple : Voici la transformation de la lettre F par homothétie de centre O et de rapport -0,25.
On a $OM = OM' \times (-0{,}25)$
O,M et M' sont alignés.



Remarque : Une homothétie de rapport 1 ne change rien, et une homothétie de rapport -1 revient à une symétrie centrale.

Remarque : Si **k>1** ou **k<-1** on parle **d'agrandissement** si **-1<k<1** on parle de **réduction**.
Voir chapitre Agrandissement et réduction

Conversion d'unité

I.Conversion des unités de longueurs

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
0	**5** 0	6 4	**6** 3	8 4		

5, 668 **hm** = 56 **6,** 8 **m** **0**,0434 **km** = 43**4 dm**

II.Conversion des unités d'aire

km²		hm²		dam²		m²		dm²		cm²		mm²	
		5	**8** **0**	4 0	5 0	0 4	**0** 3	2	**5**	8			

5**8** , 45 **hm²** = 58450**0 m²** **0,**0043258 **hm²** = 43 2**5 ,** 8 **dm²**

III.Conversion des unités de volumes

km³			hm³			dam³			m³			dm³			cm³			mm³		
											kL	hL	daL	L	dL	cL	mL			
				1	**2**	3	4	5 **0**	6 0	7 0	8 2	0 3	0 4	**0** 2	2	0	**0**			

1**2,**345678 **hm³** = 12345678000**dm³** **0,**0023422 **dam³** = 2342220**0 cm³**
= 12345678000**0 L**

IV.Unité quotient et produit

Définition : Une grandeur quotient est une grandeur obtenue en effectuant le quotient de 2 grandeurs.

Exemple : La vitesse (km/h) s'exprime comme le rapport de la distance (km) sur le temps (h).

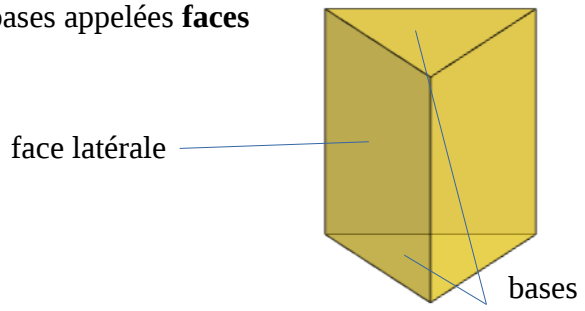
Définition : Une grandeur produit est une grandeur obtenue en effectuant le produit de 2 grandeurs.

Exemple :L'énergie (Wh) s'exprime comme le produit de la puissance de l'appareil (W) par la durée de l'utilisation (h).

Les solides

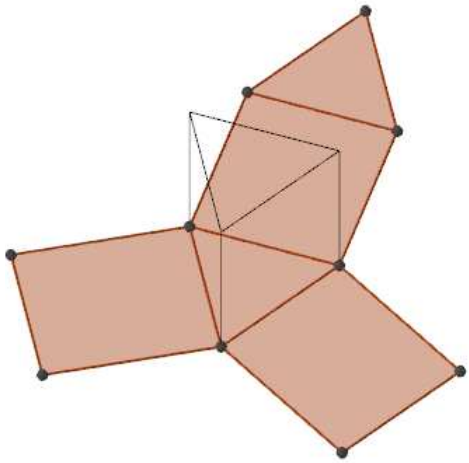
I Prisme droit

Définition : Un **prisme** droit est un solide qui a :
- 2 faces polygonales parallèles et superposables appelées **bases**
- des faces rectangulaires perpendiculaires aux bases appelées **faces latérales**



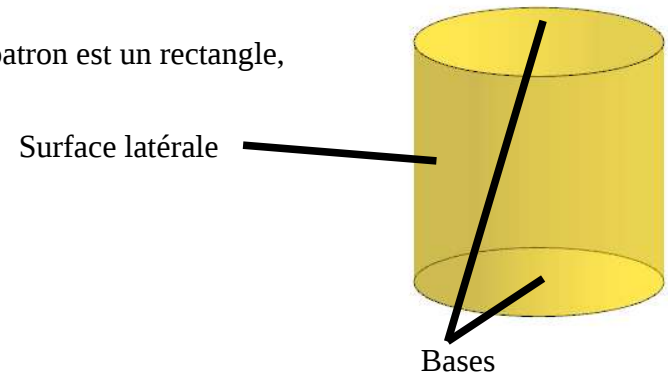
Remarque : Un pavé droit et un cube sont des **prismes particuliers**

Exemple de patrons d'un prisme droit



II.Cylindre de révolution

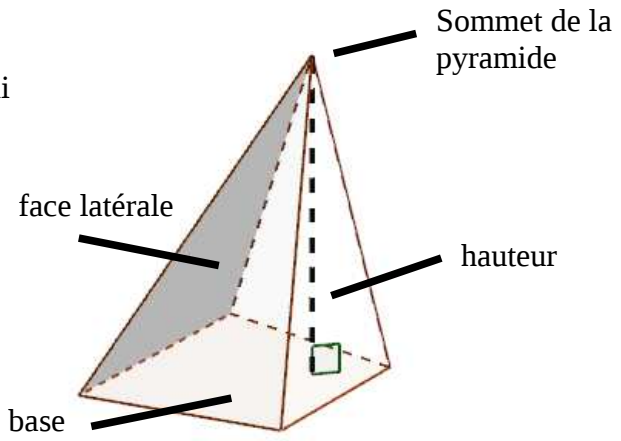
Définition : Un **cylindre droit** ou « **de révolution** »est un solide qui a :
- 2 disques superposables appelés **bases**
- Une surface entourant les bases, dont le patron est un rectangle, appelée **surface latérale.**



III. La pyramide

Définition :

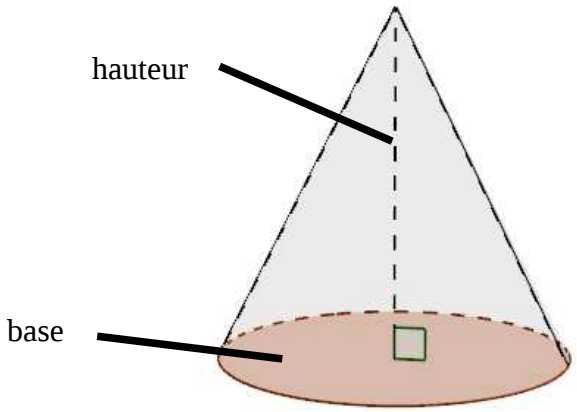
La **pyramide** est un solide qui a pour **base** un polygone et pour **faces latérales** des triangles qui ont un sommet en commun.
La distance entre le sommet de la pyramide et la base s'appelle la **hauteur**.



Définition :
Une **pyramide régulière** est une pyramide dont toutes les faces sont des triangles isocèles superposables.

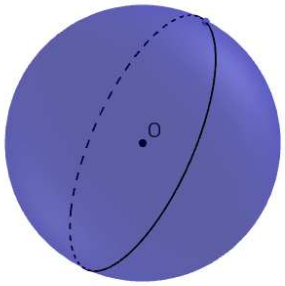
IV.Le cône de révolution

Définition : Le cône de révolution est un solide obtenu en faisant tourner un triangle rectangle autour de l'un des côtés de l'angle droit.



V. La Sphère & boule

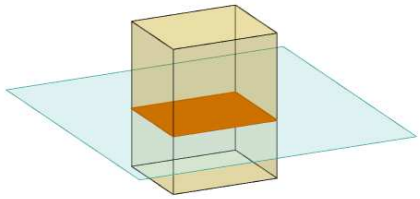
Définition :
- Une **sphère** de centre O et de rayon r est l'ensemble des points M de l'espace tels que $OM = r$.
- Une **boule** de centre O et de rayon r est l'ensemble des points M de l'espace tels que $OM \leqslant r$.



VI.Sections de différents solides

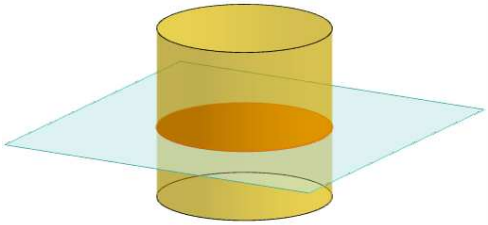
Section de pavé droit

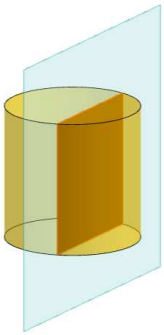
La section d'un pavé droit par un plan parallèle à la base est un rectangle de même dimension que la base.



Section de cylindre

La section d'un cylindre par un plan parallèle à sa base est un disque de même dimension que sa base.

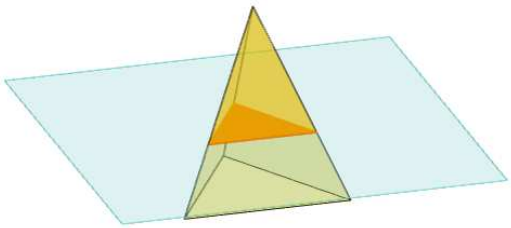


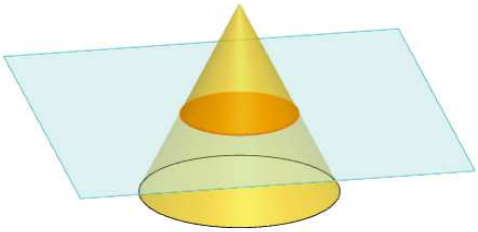


La section d'un cylindre par un plan parallèle à sa hauteur est un rectangle.

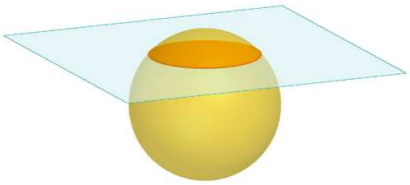
Section de pyramide ou de cône

La section de la pyramide parallèlement à sa base est un polygone qui est une réduction de la base.





La section d'un côté de révolution par un plan parallèle à sa base est un disque qui est une réduction de sa base.

Section de sphère

La section d'une sphère par un plan est un cercle.