Inégalités géométriques dans le plan euclidien

Arnaud Durand

2 mai 2006

Table des matières

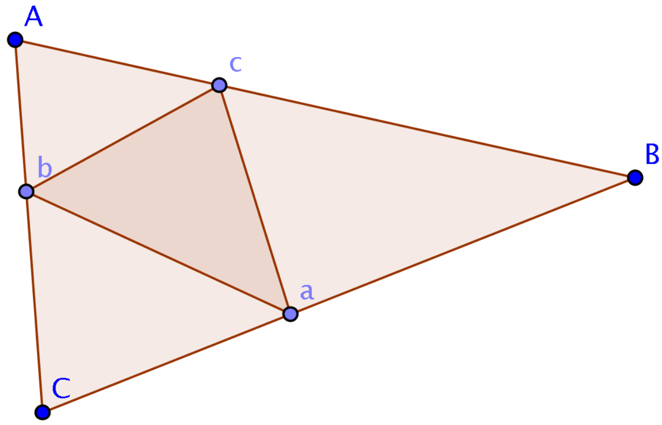
Première partie

Inégalités dans les triangles

Chapitre 1

Le problème de Fagnano

1.1 Présentation du problème



Problème 1 *A partir d'un triangle acutangle (nous verrons plus tard l'utilité de cette hypothèse), nous devons trouver le triangle de périmètre minimal, dont chaque sommet de ce dernier soit présent sur chaque côté du triangle acutangle. En d'autre termes, pour un triangle ABC dont les angles n'excède pas 90 ˚, nous devons trouver le triangle abc où a ϵ [BC] , b ϵ [AC] et c ϵ [AB] qui a le périmètre le plus petit pour sa définition.*

Ce problème peut se résoudre de deux manières par calcul différentiel ou par géométrie. Ces deux méthodes ont une étape en commun , c'est par celle-ci que nous commencerons.Ensuite nous traiterons rapidement la solution différentielle (la moins subtile), par contre nous nous attarderons plus sur la solution géométrique.

1.2 Existence de la solution

Lemme 1 *Le problème de Fagnano admet au moins une solution.*

Démonstration 1 *Posons la fonction f qui a trois point d'un triangle inscrit au triangle ABC , donne le périmètre du triangle inscrit :*

$$f : \{M/M\epsilon[AB]\} \times \{M/M\epsilon[BC]\} \times \{M/M\epsilon[AC]\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(a,b,c) = ab + ac + cb \;\forall\; (a,b,c) \;\epsilon\; \{M/M\epsilon[AB]\} \;\times\; \{M/M\epsilon[BC]\} \;\times\; \{M/M\epsilon[AC]\}$$

On peut remarquer que le triplet caractérisant le minimal de cette fonction répond au problème de Fagnano. En remarquant que f est une fonction positive (comme somme de distance) , on en déduit qu'elle admet au moins un minimum global. Donc le problme de Fagnano admet au moins une solution.✓

1.3 Partie commune aux deux méthodes :des caractéristiques du triangle orthique

Définition 1 *Dans un triangle ABC , on appelle triangle orthique du triangle ABC , le triangle abc inscrit au triangle ABC qui vérifie la condition suivante : Si a ϵ [BC] , b ϵ [CB], c ϵ [AB] alors* $(Aa) \perp (BC)$, $(Bb) \perp (AC)$ *et* $(Cc) \perp (AB)$. *Autrement dit le triangle orthique est formé à partir des pieds des hauteurs du triangle ABC.*

Propriété 1 *Les hauteurs du triangle ABC sont les bissectrices de son triangle orthique*

Démonstration 2 *On pose :*
- *ABC un triangles acutangle*
- *abc le triangle orthique correspondant*

Il faut démontrer que $\widehat{BaC} = \widehat{Bac}$, $\widehat{acB} = \widehat{Acb}$ *et* $\widehat{cbA} = \widehat{Cba}$

.On pose H l'orthocentre de ABC.

Les triangles AcC et AbB sont rectangles respectivement en c et b .Comme ils possèdent un angle en commun alors on a :

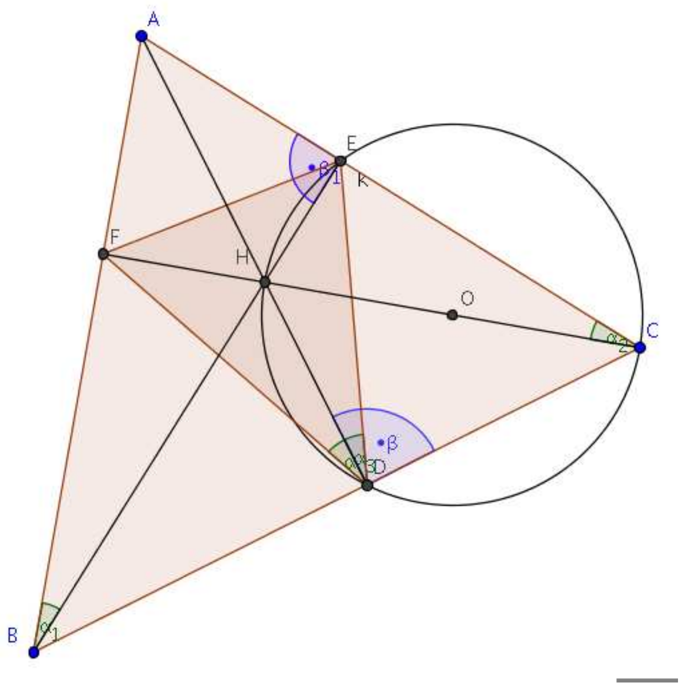
$$\widehat{cCA} = \widehat{ABb} \qquad (1.1)$$

Les triangles HcB et HaB sont rectangles respectivement en c et a. Donc les points H, c B et a sont cocyclique , ce qui se traduit par :

$$\widehat{Hca} = \widehat{HBc} \qquad (1.2)$$

De manière identique avec les points b,H,a et C , on trouve :

$$\widehat{cCA} = \widehat{Aab} \qquad (1.3)$$



Par 1.1 , 1.2 et 1.3 on trouve $\widehat{caA} = \widehat{Aab}$*.Ce qui est équivalent à ecrire que la hauteur (aA) est la bissectrice de l'angle* $\widehat{cab}$*. Par un raisonnement analogue on montre que les hauteurs (bB) et (cC) sont aussi les bissectrices du triangles abc.* ✓

Propriété 2 *Le triangle orthique abc est le seul triangle inscrit du triangle ABC tel que :*
- *la perpendiculaire à [AB] passant par c est la bissectrice de l'angle* $\widehat{bca}$
- *la perpendiculaire à [BC] passant par a est la bissectrice de l'angle* $\widehat{cab}$
- *la perpendiculaire à [AC] passant par b est la bissectrice de l'angle* $\widehat{abc}$

Démonstration 3 *Il suffit de considérer un tel triangle inscrit abc.Et de montrer qu'il est le triangle orthique.*

Traçons les bissectrices extérieurs aux angles $\widehat{cba}$,$\widehat{bac}$ *et* $\widehat{acb}$*,que l'on nommera respectivement* D_b ,D_a *et* D_c.

Nommons A l'intersection entre D_b et D_c.
Nommons B l'intersection entre D_a et D_c.
Nommons C l'intersection entre D_a et D_b.
Nommons I l'intersection des bissectrices intérieures du triangle abc(centre du cercle inscrit).

Montrons que bϵ(BI) :

Comme par définition $\widehat{BaI} = \widehat{IcB} = \frac{\pi}{2}$ alors les points B , a , I et c sont cocycliques.Et donc :

$$\widehat{BIa} = \widehat{Bca}$$

$$\widehat{cIB} = \widehat{caB}$$

.

Comme par définition $\widehat{IbA} = \widehat{AcI} = \frac{\pi}{2}$ alors les points A , c , I et b sont cocycliques.Et donc :

$$\widehat{bIA} = \widehat{bcA}$$

$$\widehat{cIA} = \widehat{cbA}$$

.

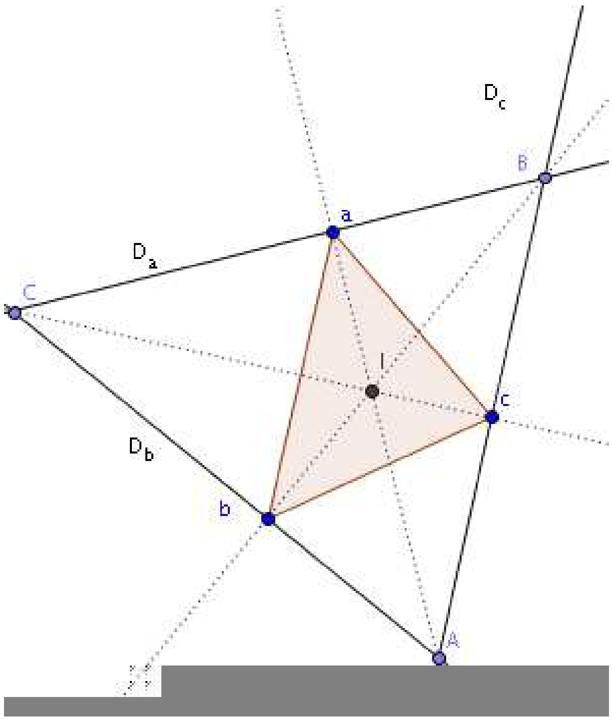
Comme par définition $\widehat{IbC} = \widehat{CaI} = \frac{\pi}{2}$ alors les points C , a , I et b sont cocycliques.Et donc :

$$\widehat{aIC} = \widehat{abC}$$

$$\widehat{bIC} = \widehat{baC}$$

.

Par définition des bissectrice (aI) , (bI) et (cI) et les égalités précédentes on a :



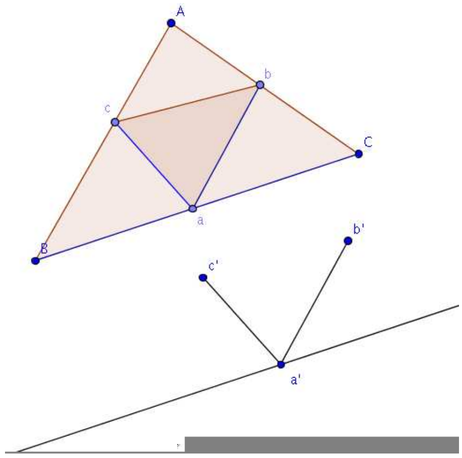
$\widehat{BIa} = \widehat{bIA}$ $\widehat{aIC} = \widehat{AIc}$ $\widehat{CIb} = \widehat{cIB}$

En sommant on obtient :$\widehat{BIa}+\widehat{aIC}+\widehat{CIb} = \widehat{bIA} + \widehat{AIc} + \widehat{cIB}$ d'où $\widehat{BIb} = \widehat{bIB}$ Donc $\widehat{BIb} = \pi$. Les points b,I et B sont donc alignés : bϵ(BI). En procédant de la même manière on démontre que cϵ(CI) et aϵ(AI). Donc les droites (aI) , (bI) et (cI) sont les hauteurs du triangles ABC. Donc abc est le triangle orthique du triangle ABC.
✓

1.4 Suite par résolution par calcul différentiel

Nous allons d'abord chercher une caractéristique que doit posséder nécéssairement le triangle inscrit de périmètre minimal.

Lemme 2 *Soit deux points A et B distincts et une droite Δ ne passant pas par ces deux points. Le placement de C sur Δ pour que la somme des distances $AC+BC$ soit minimale est sur la droite perpendiculaire à Δ qui est la bisectrice de l'angle $\widehat{ACB}$. On peut aussi écrire que l'angle entre $[BC]$ et Δ vaut l'angle entre $[AC]$ et Δ.*



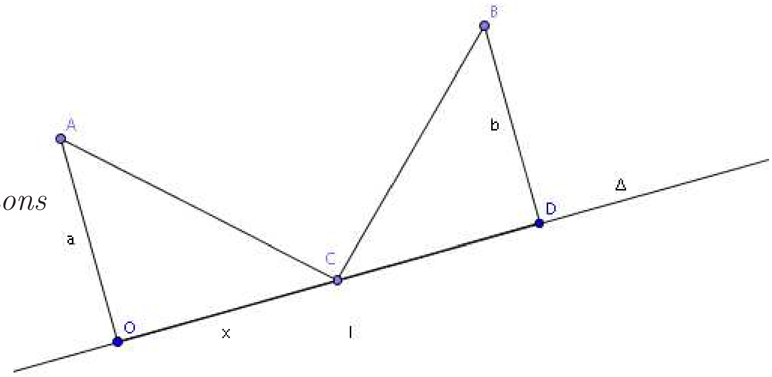
Ce lemme répond en partie au problème de Fagnano. En effet , dans le problème de Fagnano , il faut que le triangle abc soit de périmètre minimal, ie ab+ac+cb soit minimal . En considérant le placement de chaque point sur un segment par rapport au deux autres, on arrive à vouloir prouver cette affirmation.

Démonstration 1 *Posons O le projeté orthogonal de A sur Δ et D le projeté de B sur Δ. Nommons x la distance OC. C'est ce qui caractérisera la solution du problème.*

Soient aussi :
- *l la distance OD*
- *a la distance OA*
- *b la distance DB*

qui sont toutes invariantes.

Par le théorème de Pythagore nous obtenons deux égalités :



$$OA^2 + OC^2 = AC^2$$

$$CD^2 + DB^2 = CB^2$$

D'où par simplification :

$$AC + CB = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{(l-x)^2 + b^2}$$

Soit la fonction f telle que :

$$f(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{(l-x)^2 + b^2}$$

<u>Etude de f :</u>

On remarque tout d'abord que f possède un minimum global car f est positive. Puis f est dérivable en tout points car $a > 0$ et $b > 0$ (A et B n'appartiennent pas à la droite).

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{l-x}{\sqrt{(l-x)^2+b^2}} \\ &= \frac{OC}{OA} - \frac{CD}{BD} \end{aligned} \tag{1.4}$$

Supposons que x est tel que :

$$f'(x) = 0$$

on obtient par (2.1) , que :

$$\frac{OC}{OA} = \frac{CD}{BD}$$

Or comme les triangles AOC et BDC sont respectivement rectangles en O et D

$$\tan(\widehat{AOC}) = \tan(\widehat{CBD})$$

Comme les angles $\widehat{AOC}$ *et* $\widehat{CBD}$ *sont aigus , et que la fonction* tan *est un isomorphisme de* $]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *sur* $\mathbb{R}$ *alors :*

$$\widehat{OAC} = \widehat{CBD}$$

. ce qui implique aussi que

$$\widehat{DIB} = \widehat{ACO}$$

. Ce qui implique que la position du point C est unique. Donc f' *ne s'annule qu'une seule fois sur* $\mathbb{R}$*. Or comme f possède un minimum global, celui-ci est donc obligatoirement caractérisé par* $f'(x) = 0$ *.*

On peut donc conclure que le point C minimisant AC+BC est donnée par la relation :

$$\widehat{DIB} = \widehat{ACO}$$

Soit entre autre que la perpendiculaire à (OD) passant par C est la bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$*.*✓

Remarque 1 *Donc par le lemme 2 on doit chercher un triangle abc inscrit dans le triangle ABC qui vérifie :*

- *la perpendiculaire à [AB] passant par c est la bissectrice de l'angle* $\widehat{bca}$
- *la perpendiculaire à [BC] passant par a est la bissectrice de l'angle* $\widehat{cab}$
- *la perpendiculaire à [AC] passant par b est la bissectrice de l'angle* $\widehat{abc}$

Par la propriété 1 et la propriété 2 on peut voir que le triangle orthique remplit ces conditions nécéssaires. et est le seul à les remplir.

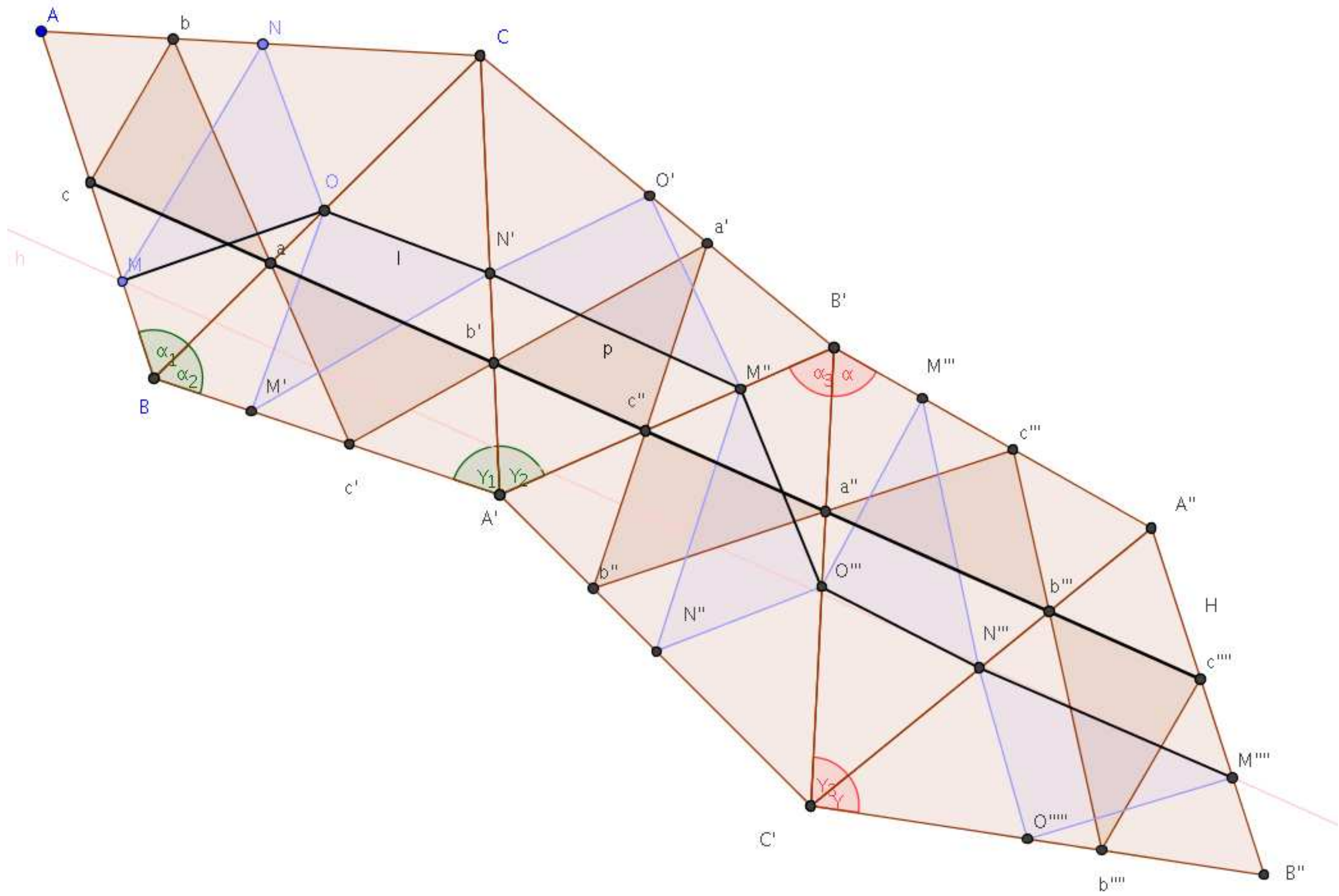
Or on sait que le problème admet au moins une solution. Ces solutions doivent remplir une condition que seul le triangle orthique remplis. On en conclut donc que le triangle orthique est la solution du problème de Fagnano.

Remarque 2 *Cette méthode reste néanmoins moderne et nécéssite l'appel à des connaissances variés tant géométrique que différentielle. Néanmoins nous retiendrons le lemme 2 qui servira pour le problème isopérimétrique.*

Voici la deuxième méthode , qui nécéssite seulement des connaissances en géométrie.

1.5 Suite par résolution par géométrie

Le raisonnement suivant se base sur la figure suivante. Nous avons procédé à des symétries axiales du triangle considéré par d'abord le côté [CB] puis de cette image on a procédé à la symétrie axial d'axe [A'C] (A' étant l'image de A par la première symétrie) , puis par le côté [B'A'] , [C'B'] et enfin [A"C']. En marron sont dessinés les images du triangle orthique , et en bleue un triangle inscrit quelconque.



Lemme 3 *Les côtés [A"B"] et [AB] sont parallèles.*

Démonstration 2 *Il suffit de faire la somme (S) des angles successifs de la ligne brisé ABA'B'A"B" :*

$$S = \widehat{ABC} + \widehat{CBA'} + \widehat{BA'C} + \widehat{CA'B'} + \widehat{A'B'C'} + \widehat{C'B'A''} + \widehat{B'C'A''} + \widehat{A''C'B''}$$

Or les symétries axiales conservent les angles ce qui donne :

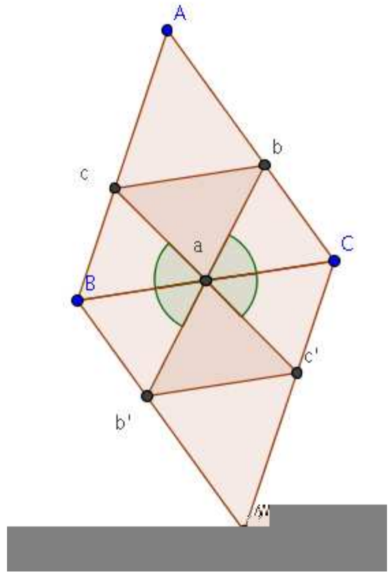
$$S = 2.\widehat{ABC} + 2.\widehat{BAC} - 2.\widehat{ABC} - 2.\widehat{BAC} = 0$$

Donc on a bien $(BA) \parallel (B''A'')$ *Et aussi BA=B"A" . Comme ce ne sont que des symétries axiales : tout point P sur [AB] aura pour image par les différentes symétries un point P' sur [A"B"] . Et par conservation des barycentres ,* $(PP') \parallel (AA')$ *, et PP' = AA' .* ✓

Maintenant regardons l' image successive de A, sommet du triangle orthique par la symétrie d'axe (CB)

Propriété 3 *La ligne brisée cab'c"a"b"'c"' est droite et donc la plus courte qui rejoint c à c"'*

Démonstration 3 *Regardons d'abord le cas sur une symétrie axiale.*



Lemme 4 *La ligne brisée bab' rejoignant b à b' est droite .*

Démonstration 4 (lemme3) *Par le lemme 1 qui définit le triangle orthique , on sait que*

$$\widehat{caB} = \widehat{Cab} \tag{1.5}$$

Comme la symétrie axiale conservent les angles , on sait aussi que

$$\widehat{Cab} = \widehat{Cac'} \tag{1.6}$$

Par 1.5 et 1.6 on a

$$\widehat{caB} = \widehat{Cac'}$$

Donc la ligne brisée cac' est droite , de la même manière la ligne brisée bab' est droite aussi. ✓

Suite Démonstration 1 *En appliquant ce lemme 4 à chaque transformation du triangle par les symétries axiales. On démontre que la ligne brisée cab'c"a"b"'c"' est droite.* ✓

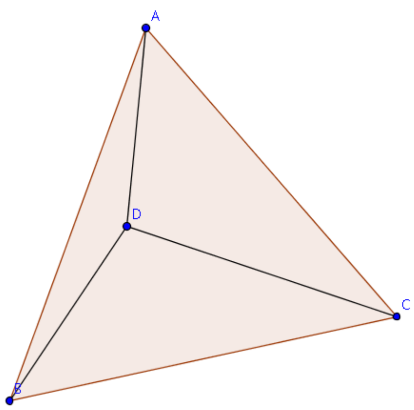
Remarquons que le ligne brisée cab'c"a"b"'c"' a pour longueur le double du périmètre du triangle inscrit. Par cela on démontre que le triangle orthique est de périmètre minimal car la ligne brisée créée par celui-ci est droite donc la plus courte. Deplus il est le seul triangle à avoir la propriété 1 que nous avons utilisé (Voir propriété 2). Donc c'est aussi l'unique solution.✓

Chapitre 2

Le problème de Fermat

2.1 Présentation du problème

Problème 1 *On se donne un triangle ABC dont les angles sont inférieurs à $\frac{2.\pi}{3}$. Il s'agit de trouver un point D dans l'intérieur du triangle ABC dont la somme S est minimale avec :*
$S = AD + BD + CD$.



Tout d'abord nous étudierons une caractéristique de la solution en supposant qu'elle existe(c'est une condition nécéssaire). Ensuite nous la construirons ce qui démontrera l'existence d'un point qui vérifie la condition nécéssaire. Puis par l'absurde nous démontrerons l'unicité de ce point , ce qui démontrera que la condition est nécéssaire et suffisante.

2.2 Existence de la solution

Lemme 1 *A ce problème il existe au moins une solution .*

Démonstration 1 *Nous allons raisonner par calcul différentiel.*
Posons

A ,B, et C les points du triangle considéré $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$f(M) = MA + MB + MC \ \forall M \epsilon \mathbb{R}^2$

On remarque que le minimum de f s'il existe serait donc la solution du problème. Il suffit de remarquer que f est positive comme somme de distance. Donc il existe un minimum global , il existe donc une solution (ou plusieurs) au problème de Fermat. ✓

2.3 Unicité de la solution

Lemme 2 *Le problème admet un seul point comme solution.*

Démonstration 2 *Supposons qu'il existe deux point I et J répondant au critère de minimalité de la fonction f définie dans la section précédente.On a donc f(I)=f(J).*

Soit O le milieu de [IJ] , montrons que f(O)<f(I)=f(J). Supposons sans perte de généralité que I,J et A ne sont pas alignés.(Sinon on remplace A par B ou C). Par une inégalité du parallèlogramme (la diagonale est plus courte que la somme des deux côtés) on a :

$$AI + AJ > 2.AO$$

$$BI + BJ \geq 2.BO$$

$$CI + CJ \geq 2.CO$$

Donc par somme :

$$AI + BI + CI + AJ + BJ + CJ > 2.(AO + BO + CO)$$

$$f(I) + f(J) > 2.f(O)$$

$$f(I) = f(J) > f(O)$$

ce qui contredit le critère de minimalité de I et J. Donc la solution est donc unique.✓

Remarque 3 *Ce point est appelé Point de Fermat.*

2.4 Caractéristique du point de Fermat

Lemme 3 *Soit P la solution unique du problème de Fermat dans le triangle ABC . Alors on a :*

$$\widehat{CPA} = \widehat{APB} = \widehat{BPC} = \frac{2.\pi}{3}$$

.

Démonstration 3 *Nous allons raisonner par calcul différentiel.*
Nous avons comme défini précédement : A ,B, et C les points du triangle considéré $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(M) = MA + MB + MC$ $\forall M \epsilon \mathbb{R}^2$ on peut noter aussi :

$$f(M) = \|\overrightarrow{MA}\| + \|\overrightarrow{MB}\| + \|\overrightarrow{MC}\|$$

D'après le problème de Fermat , il faut trouver le minimum de cette fonction dans l'intérieur du triangle(noté mathringABC).

$\forall M \epsilon \mathring{ABC}$, $M \neq A$ ou B ou C car M appartient à l'interieur du triangle. Comme $M \neq A$ ou B ou C. alors f est différentiable en tout point de mathringABC. (en considérant les dérivées partielles on montre facilement que celle-ci sont C^1 sur ce domaine).

Et on a trouvé :

$$\begin{aligned} f'(M) &= \frac{\overrightarrow{MA}}{\|\overrightarrow{MA}\|} + \frac{\overrightarrow{MB}}{\|\overrightarrow{MB}\|} + \frac{\overrightarrow{MC}}{\|\overrightarrow{MC}\|} \\ &= \frac{\overrightarrow{MA}}{MA} + \frac{\overrightarrow{MB}}{MB} + \frac{\overrightarrow{MC}}{MC} \end{aligned} \tag{2.1}$$

On pose P la solution du problème.On nomme

$$\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{PA}}{PA}\ ,\ \overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{PB}}{PB}\ ,\ \overrightarrow{w} = \frac{\overrightarrow{PC}}{PC}$$

Remarque 4 *on a :* $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{w}\| = 1$.

Alors si P est la solution on a par définition de f :

$$f'(P) = 0$$

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = 0$$

$$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2 = \|\overrightarrow{w}\|^2$$

$$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2 = 1$$

$$\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 + \cos((\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})) = 1$$

$$\cos((\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})) = -1$$

$$(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = \pm\frac{2.\pi}{3}$$

d'où

$$(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = \pm\frac{2.\pi}{3}$$

$$\widehat{AMB} = \frac{2.\pi}{3} \text{ car } M \text{ est dans le triangle.}$$

En procédant de la même manière pour les autres angles on trouve

$$\widehat{CPA} = \widehat{APB} = \widehat{BPC} = \frac{2.\pi}{3}.$$

✓

Lemme 4 *Le point de Fermat (la solution) est le seul point à vérifier le lemme 3.*

Démonstration 4 *Supposons que le point de Fermat n'est pas le seul point à verifier le lemme 3. Soit ABC le triangle possédant I et P deux points vérifiant :*

$$\widehat{CIA} = \widehat{AIB} = \widehat{BIC} = \frac{2.\pi}{3}$$

et

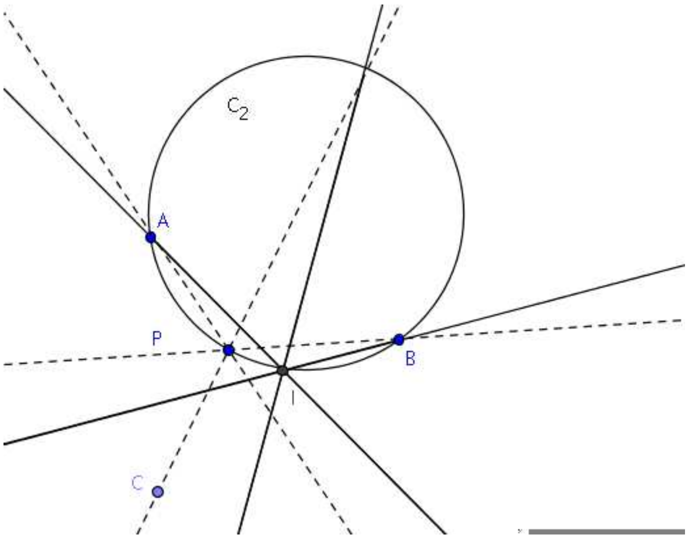
$$\widehat{CPA} = \widehat{APB} = \widehat{BPC} = \frac{2.\pi}{3}$$

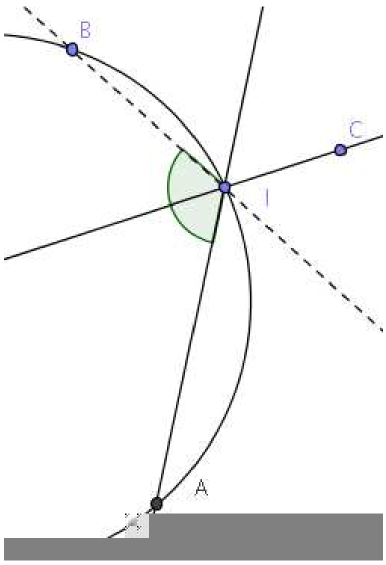
Donc les points :

- *A,P,I et C sont cocycliques.*
- *A,P,I et B sont cocycliques.*
- *B,P,I et C sont cocycliques.*

Soit C_1 le cercle contenant A,P,I et C , C_2 celui contenant A,P,I et B et C_3 celui contenant B,P,I et C . Comme C_1 et C_2 ont trois points en commun (A,P,I) ils sont confondus. De même que C_1 et C_3 ont trois points en commun (P,I et C) , ils sont donc tous les trois confondus.

Donc A,B,C,I et P sont sur le cercle C_1. Supposons sans perte de généralité que I est sur l'arc AB (l'arc ne contenant pas C). Donc comme $\widehat{CIA} = \frac{2.\pi}{3}$ alors C n'est pas sur le cercle ou il est confondu avec C ce qui dans les deux cas contredit les hypothèses. Donc il n'existe donc pas deux points vérifiant les conditions . ✓



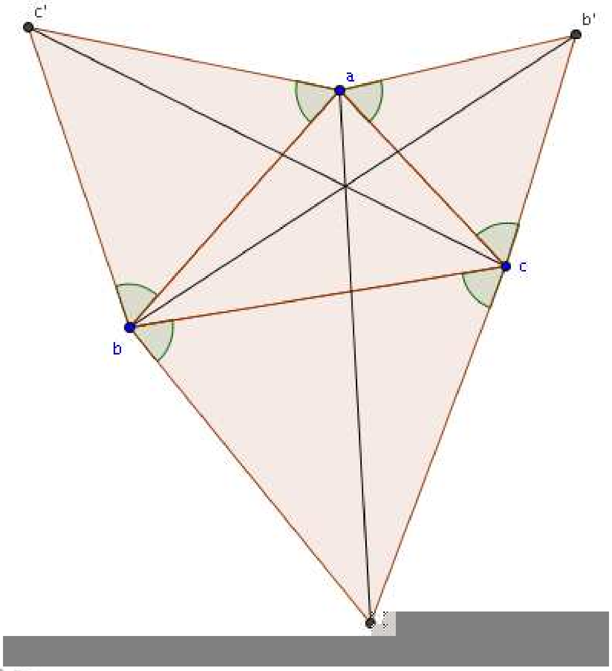


On peut conlcure que la solution de ce probème est caractérisée par le lemme 3.

2.5 Construction du point de Fermat

Soit abc le triangle non plat considéré,on place a',b',c' tels que ab'c, ba'c, et ac'b soient des triangles équilatéraux. Soient R_a , R_b , R_c les rotations de centre respectifs a,b et c et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Lemme 5 *Les droites (aa') (bb') et (cc') sont concourantes.*



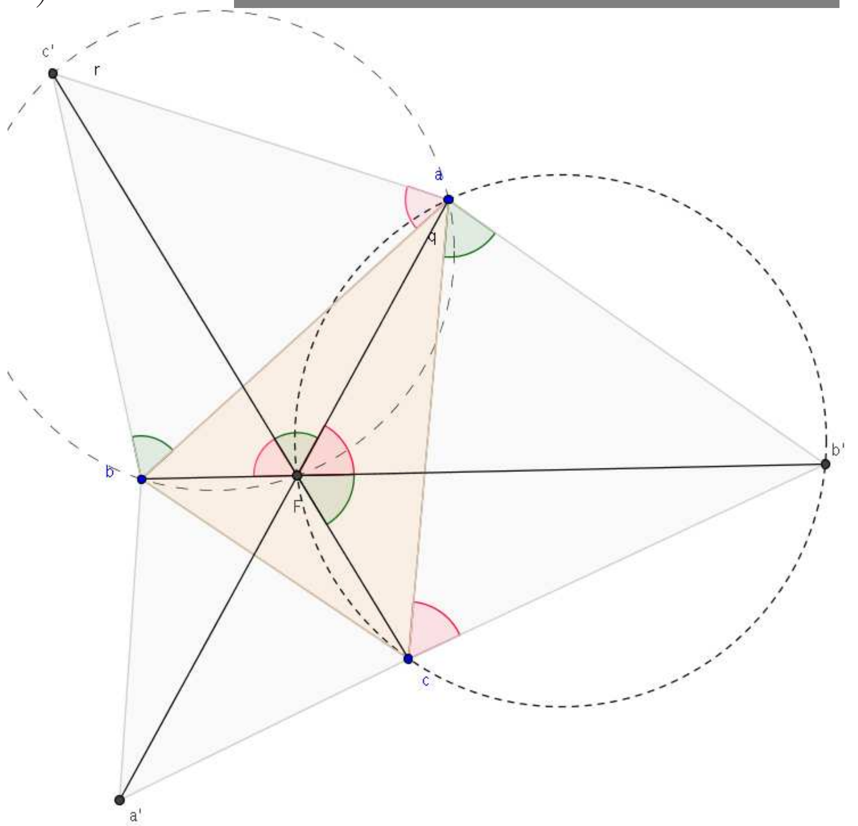
Démonstration 5 *Du fait que les triangles ab'c , ba'c et bac' sont équilatéraux alors on a :*

R_a *(b) = c'*
R_a *(b') = c*
R_b *(c') = a*
R_b *(c) = a'*
R_c *(a) = b'*
R_c *(a') = b*

Donc par conservation des longueurs des rotations on obtient :

bb'=cc'
cc'=aa'
aa'=bb'

Notons F le croisement de (aa') et (bb').



Lemme 6 *Les points b', a , F et c sont cocycliques. Les points b , F , a et c' sont cocycliques.*

Démonstration 6 *(lemme 6) L'angle $\widehat{b'Fc}$ formé par (bb') et (cc') est donc de $\frac{\pi}{3}$ car on a R_a((bb'))=(cc'). Comme $\widehat{b'ac} = \frac{\pi}{3}$ (le triangle b'ac est équilatéral) alors*

$$\widehat{b'ac} = \widehat{b'Fc}$$

Les points b', a , F et c sont donc cocycliques. De la même manière on démontre que les points b,F ,a et c' sont cocycliques.✓

Suite Démonstration 2 *Par le lemme 6 on a par transport de l'angle sur le cercle :*

- $\widehat{aFb'} = \widehat{acb'} = \widehat{b'Fc} = \widehat{b'ac} = \frac{\pi}{3}$
- $\widehat{bFc'} = \widehat{bac'} = \widehat{c'Fa} = \widehat{c'ba} = \frac{\pi}{3}$

Or R_b((aa'))=(cc') donc l'angle entre (aa') et (cc') vaut $\frac{\pi}{3}$. Or $\widehat{aFc'} = \frac{\pi}{3}$donc l'angle entre (aF) et (Fc') vaut $\frac{\pi}{3}$. Comme F appartient à (cc') , donc (aF) et (aa') sont confondues et donc F appartient à (aa'). Donc on a F ϵ (aa') , F ϵ (bb') et F ϵ (cc'). ✓

Propriété 1 *Le point F est le point de Fermat, il vérifie les conditions nécéssaires du lemme 3 qui sont*

$$\widehat{cFa} = \widehat{aFb} = \widehat{bFc} = \frac{2.\pi}{3}$$

.

Démonstration 7 *On a :*

- $\widehat{b'Fa} = \widehat{cFb'} = \frac{\pi}{3}$
- $\widehat{bFc'} = \widehat{c'Fa} = \frac{\pi}{3}$

D'où :

- $\widehat{cFa} = \widehat{cFb'} + \widehat{b'Fa} = \frac{2.\pi}{3}$
- $\widehat{bFc} = \widehat{bFc'} + \widehat{c'Fa} = \frac{2.\pi}{3}$

Et en conséquence $\widehat{aFb} = \frac{2.\pi}{3}$ *Ce qui démontre que F est le point de Fermat.*✓

Chapitre 3

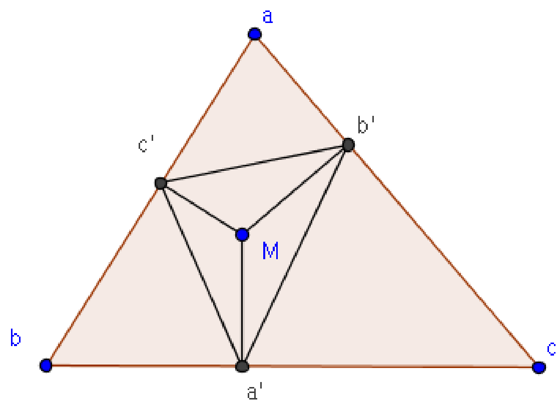
L'aire des triangles podaires

3.1 Présentation du problème

Définition 2 *Un triangle podaire est un triangle inscrit formé à partir des projetés orthogonaux d'un point donné sur les trois côtés du triangle.*

Problème 1 *Soit (abc) un triangle acutangle, où placer un point M, tel que le triangle formé par les projections a', b' et c' de M sur respectivement [bc], [ac] et [ab] soit d'aire maximale.*

voir dessin ci-contre :



3.2 Existence d'une solution

Lemme 1 *Il existe au moins une solution au problème donné.*

Démonstration 1 *Il suffit de remarquer que l'aire de tout triangle inscrit a'b'c' ne peut dépasser l'aire du triangle abc. Donc comme l'aire est majorée , il existe donc au moins un maximum.*

3.3 Recherche de la solution

Tout d'abord introduisons un nouvel outil, les aires orientées.Soit le triangle abc alors son aire $\mathbb{A}(a, b, c)$ est donnée par :

$$\mathbb{A}(a, b, c) = \frac{1}{2}(\vec{ab} \wedge \vec{ac}) = \frac{1}{2}(\|\vec{ab}\|.\|\vec{ac}\|.\sin(\widehat{\vec{ab}, \vec{ac}})$$

En posant $\|\vec{ab}\|$ la longueur de la base , $\|\vec{ac}\|.\sin(\widehat{\vec{ab}, \vec{ac}})$ est bien la longueur de la hauteur ayant son pied sur la base. Donc la formule de l'aire orienté est cohérente. Deplus on a : $\forall$ t dans le plan,

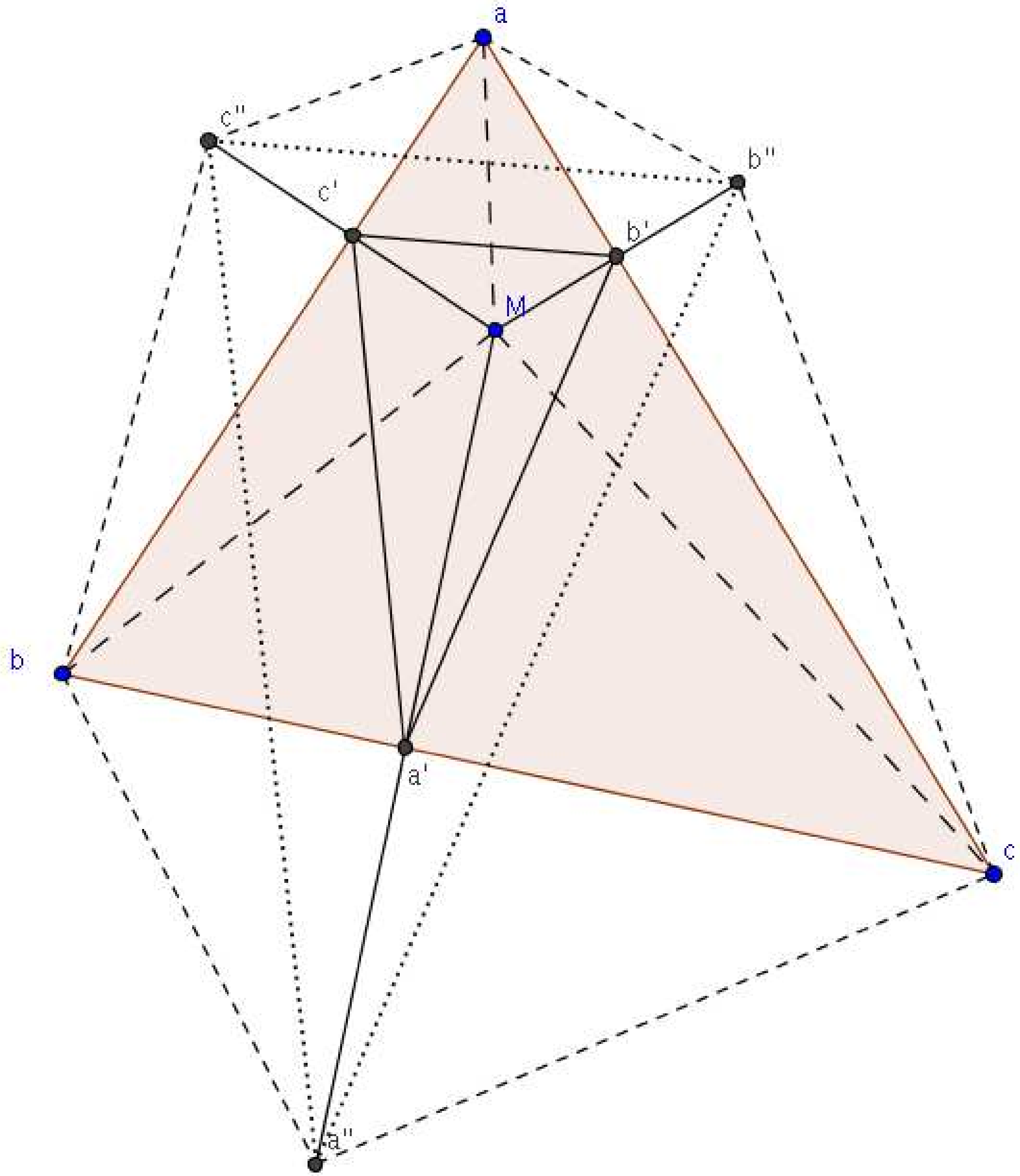
$$\mathbb{A}(a, b, c) = \mathbb{A}(t, a, b) + \mathbb{A}(t, b, c) + \mathbb{A}(t, c, a)$$

Lemme 2 *Pour tout triangle podaire a'b'c' dans un triangle abc créé par le point M on a :*

$$2.\mathbb{A}(a,b,c) = \frac{1}{2}.(cM)^2.\sin(2.\widehat{\vec{ca},\vec{cb}}) + \frac{1}{2}(bM)^2.\sin(2.\widehat{\vec{bc},\vec{ba}}) + \frac{1}{2}(aM)^2.\sin(2.\widehat{2.\vec{ab},\vec{ac}}) + 4.\mathbb{A}(a',b',c')$$

Démonstration 2 *Posons*

- *a" l'image de M par la symétrie axiale d'axe (bc) .*
- *b" l'image de M par la symétrie axiale d'axe (ac) .*
- *c" l'image de M par la symétrie axiale d'axe (ab) .*



On obtient donc

- $\mathbb{A}(a, M, c) = \mathbb{A}(a, c, b'')$
- $\mathbb{A}(a, b, M) = \mathbb{A}(a, c'', b)$
- $\mathbb{A}(b, c, M) = \mathbb{A}(b, a'', c)$

et on a

$$\mathbb{A}(a,b,c) = \mathbb{A}(a,b,M) + \mathbb{A}(b,c,M) + \mathbb{A}(a,M,c) \tag{3.1}$$

Or en découpant l'hexagone ac"ba"cb" on obtient :

$$\mathbb{A}(a,c'',b,a'',c,b'') = \mathbb{A}(a,b,M) + \mathbb{A}(b,c,M) + \mathbb{A}(a,M,c) + \mathbb{A}(a,c,b'') + \mathbb{A}(a,c'',b) + \mathbb{A}(b,a'',c)$$

d'où par 3.1 :

$$\mathbb{A}(a,c'',b,a'',c,b'') = 2.\mathbb{A}(a,b,c) \tag{3.2}$$

Or par un autre découpage de l'hexagone on a :

$$\mathbb{A}(a,c'',b,a'',c,b'') = \mathbb{A}(b'',a'',c) + \mathbb{A}(c'',a'',b'') + \mathbb{A}(a,c'',b'') + \mathbb{A}(c'',b,a'')$$

Ce qui donne par 3.2 :

$$2.\mathbb{A}(a,b,c) = \mathbb{A}(b'',a'',c) + \mathbb{A}(c'',a'',b'') + \mathbb{A}(a,c'',b'') + \mathbb{A}(c'',b,a'') \tag{3.3}$$

En considérant l'homothétie (conservent les angles) h de rapport 2 et de centre M ,on déduit que

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}(a'',b'',c'') &= \frac{1}{2}(\|\vec{a''b''}\|.\|\vec{a''c''}\|.\sin(\widehat{\vec{a''b''},\vec{a''c''}}) \\
&= \frac{1}{2}(2.\|\vec{a'b'}\|.2.\|\vec{a'c'}\|.\sin(\widehat{\vec{a'b'},\vec{a'c'}}) \\
\mathbb{A}(a'',b'',c'') &= 4.\mathbb{A}(a',b',c')
\end{aligned} \tag{3.4}$$

D'où par 3.3 :

$$2.\mathbb{A}(a,b,c) = \mathbb{A}(b'',a'',c) + 4.\mathbb{A}(c',a',b') + \mathbb{A}(a,c'',b'') + \mathbb{A}(c'',b,a'')$$

Lemme 3 *On a :*

$$\mathbb{A}(a,c'',b'') = \frac{1}{2}(aM)^2.\sin(\widehat{2.\vec{ab},\vec{ac}})$$

$$\mathbb{A}(b'',a'',c) = \frac{1}{2}(cM)^2.\sin(\widehat{2.\vec{ca},\vec{cb}})$$

$$\mathbb{A}(c'',b,a'') = \frac{1}{2}(bM)^2.\sin(\widehat{2.\vec{bc},\vec{ba}})$$

Démonstration 3 *Par les différentes symétries on a :*

$$\widehat{\vec{aM},\vec{ab'}} = \widehat{\vec{ab'},\vec{ab''}}$$

$$\widehat{\vec{ac'},\vec{aM}} = \widehat{\vec{ac''},\vec{ac'}}$$

D'où

$$\widehat{\vec{aM},\vec{ab''}} = 2.\widehat{\vec{aM},\vec{ab'}}$$

$$\widehat{\vec{ac''},\vec{aM}} = 2.\widehat{\vec{ac'},\vec{aM}}$$

ce qui donne :

$$\widehat{\vec{ac''}, \vec{ab''}} = 2.\widehat{\vec{ac'}, \vec{ab'}}$$

Sachant en plus que aM=ac"=ab" les symétries alors par la définition de l'aire orientée on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}(a, c'', b'') &= \frac{1}{2}(\|\vec{ac''}\|.\|\vec{ab''}\|.\sin(\widehat{\vec{ac''}, \vec{ab''}}) \\
&= \frac{1}{2}ac''.ab''.\sin(\widehat{\vec{ac''}, \vec{ab''}}) \\
&= \frac{1}{2}.(aM)^2.\sin(\widehat{\vec{ac''}, \vec{ab''}}) \\
\mathbb{A}(a, c'', b'') &= \frac{1}{2}.(aM)^2.\sin(2.\widehat{\vec{ac'}, \vec{ab'}})
\end{aligned}$$

En procédant de la même manière pour les autres aires $\mathbb{A}(b'', a'', c)$, $\mathbb{A}(c'', b, a'')$ on obtient les égalités du lemme .✓

Suite Démonstration 3 *Donc par ce lemme 3 on obtient :*

$$2.\mathbb{A}(a, b, c) = \frac{1}{2}.(cM)^2.\sin(2.\widehat{\vec{ca}, \vec{cb}}) + \frac{1}{2}(bM)^2.\sin(2.\widehat{\vec{bc}, \vec{ba}}) + \frac{1}{2}(aM)^2.\sin(2.\widehat{\vec{ab}, \vec{ac}}) + 4.\mathbb{A}.A(a', b', c')$$

✓

Par ce lemme 2 on obtient la relation :

$$\mathbb{A}(a', b', c') = \frac{1}{2}\mathbb{A}(a, b, c) - \frac{1}{8}((cM)^2.\sin(2.\widehat{\vec{ca}, \vec{cb}}) + (bM)^2.\sin(2.\widehat{\vec{bc}, \vec{ba}}) + (aM)^2.\sin(2.\widehat{\vec{ab}, \vec{ac}}))$$

Comme on veut maximiser l'aire du triangle a'b'c' , il faut minimiser $((cM)^2.\sin(2.\widehat{\vec{ca}, \vec{cb}}) + (bM)^2.\sin(2.\widehat{\vec{bc}, \vec{ba}}) + (aM)^2.\sin(2.\widehat{\vec{ab}, \vec{ac}}))$

On pose f la fonction : $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$f(M) = (cM)^2.\sin(2.\widehat{\vec{ca}, \vec{cb}}) + (bM)^2.\sin(2.\widehat{\vec{bc}, \vec{ba}}) + (aM)^2.\sin(2.\widehat{\vec{ab}, \vec{ac}})$ ∀M appartenant à l'intérieur du triangle abc.

Lemme 4 *f est une fonction qui possède au moins un minimum.*

Démonstration 4 *En remarquant que f est positive , alors elle possède au moins un minimum.✓*

Lemme 5 *f atteint son minimum en K , le centre du cercle inscrit à abc.*

Démonstration 5 *En remarquant que f(M) s'écrit aussi :*

$$f(M) = \|(\vec{c}M)\|^2.\sin(2.\widehat{\vec{ca}, \vec{cb}}) + \|(\vec{b}M)\|^2.\sin(2.\widehat{\vec{bc}, \vec{ba}}) + \|(\vec{a}M)\|^2.\sin(2.\widehat{\vec{ab}, \vec{ac}})$$

On voit que f est différentiable en tout point M du plan et on a

$$f'(M) = 2.(\vec{c}M\sin(2.\widehat{\vec{ca}, \vec{cb}}) + \vec{b}M.\sin(2.\widehat{\vec{bc}, \vec{ba}}) + \vec{a}M\sin(2.\widehat{\vec{ab}, \vec{ac}})) \quad (3.5)$$

Soit P un point du plan tel que :

$$f'(P) = 0$$

Il existe , car f possède au moins un minimum. On a alors :

$$c\vec{P}\sin(2.\widehat{\vec{ca},\vec{cb}}) + b\vec{P}.\sin(2.\widehat{\vec{bc},\vec{ba}}) + a\vec{P}\sin(2.\widehat{\vec{ab},\vec{ac}}) = 0$$

Alors P est le barycentre du système pondéré $\{(a,\sin(2.\widehat{\vec{ab},\vec{ac}})),(b,\sin(2.\widehat{\vec{bc},\vec{ba}})),(c,\sin(2.\widehat{\vec{ca},\vec{cb}}))\}$ *, il est donc unique . Et on a*

$$P\vec{M} = \frac{c\vec{M}\sin(2.\widehat{\vec{ca},\vec{cb}}) + b\vec{M}.\sin(2.\widehat{\vec{bc},\vec{ba}}) + a\vec{M}\sin(2.\widehat{\vec{ab},\vec{ac}})}{\sin(2.\widehat{\vec{ca},\vec{cb}}) + \sin(2.\widehat{\vec{bc},\vec{ba}}) + \sin(2.\widehat{\vec{ab},\vec{ac}})}$$

On remarque ainsi que P est le centre du cercle circonscrit du triangle abc , c'est-à-dire K. En effet On a

$$P\vec{K} = \frac{c\vec{K}\sin(2.\widehat{\vec{ca},\vec{cb}}) + b\vec{K}.\sin(2.\widehat{\vec{bc},\vec{ba}}) + a\vec{K}\sin(2.\widehat{\vec{ab},\vec{ac}})}{\sin(2.\widehat{\vec{ca},\vec{cb}}) + \sin(2.\widehat{\vec{bc},\vec{ba}}) + \sin(2.\widehat{\vec{ab},\vec{ac}})}$$

Soit $\vec{G}$ *:*

$$\vec{G} = 2.R.(c\vec{K}\sin(2.\widehat{\vec{ca},\vec{cb}}) + b\vec{K}.\sin(2.\widehat{\vec{bc},\vec{ba}}) + a\vec{K}\sin(2.\widehat{\vec{ab},\vec{ac}}))$$

$$\vec{G} = 2.R.c\vec{K}\sin(2.\widehat{\vec{ca},\vec{cb}}) + 2.R.b\vec{K}.\sin(2.\widehat{\vec{bc},\vec{ba}}) + 2.R.a\vec{K}\sin(2.\widehat{\vec{ab},\vec{ac}})$$

Il suffit donc de montrer que $\vec{G} = 0$*. Comme :*

$$\frac{ab}{\sin(\widehat{\vec{ca},\vec{cb}})} = \frac{bc}{\sin(\widehat{\vec{ab},\vec{ac}})} = \frac{ac}{\sin(\widehat{\vec{bc},\vec{ba}})} = 2.R$$

Avec R le rayon du cercle circonscrit au triangle. Alors

$$\vec{G} = c\vec{K}\sin(2.\widehat{\vec{ca},\vec{cb}}).\frac{ab}{\sin(\widehat{\vec{ca},\vec{cb}})} + b\vec{K}.\sin(2.\widehat{\vec{bc},\vec{ba}}).\frac{ac}{\sin(\widehat{\vec{bc},\vec{ba}})} + a\vec{K}\sin(2.\widehat{\vec{ab},\vec{ac}}).\frac{bc}{\sin(\widehat{\vec{ab},\vec{ac}})}$$

Or $\sin(2.x) = 2.\sin(x).\cos(x)$ *:*

$$\vec{G} = c\vec{K}\cos(\widehat{\vec{ca},\vec{cb}}).ab + b\vec{K}.\cos(\widehat{\vec{bc},\vec{ba}}).ac + a\vec{K}\cos(\widehat{\vec{ab},\vec{ac}}).bc$$

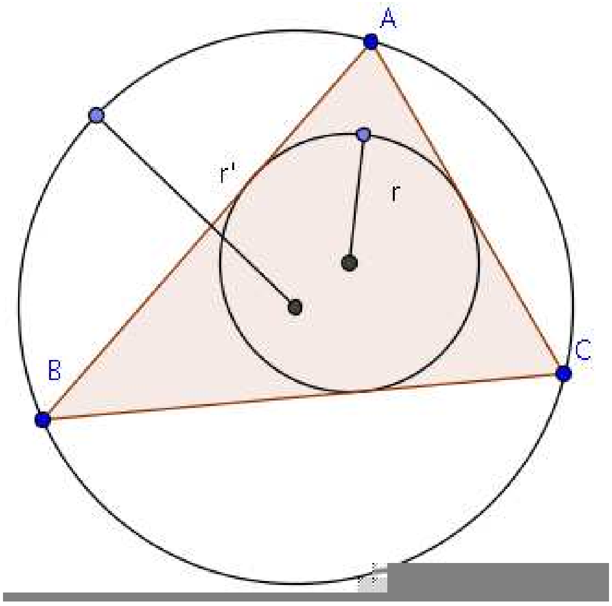
.......................(je n'ai pas trouvé de précision sur la suite du raisonnement à tenir quand aux précisions à donner)

✓

Chapitre 4

L'inégalité d'Euler

4.1 Présentation du problème



Problème 1 *Il s'agit de démontrer que dans tout triangle , le rayon du cercle inscrit r est au moins deux fois plus petit que le rayon du cercle circonscrit r' au triangle considéré.ie* $r' \geq 2.r$.

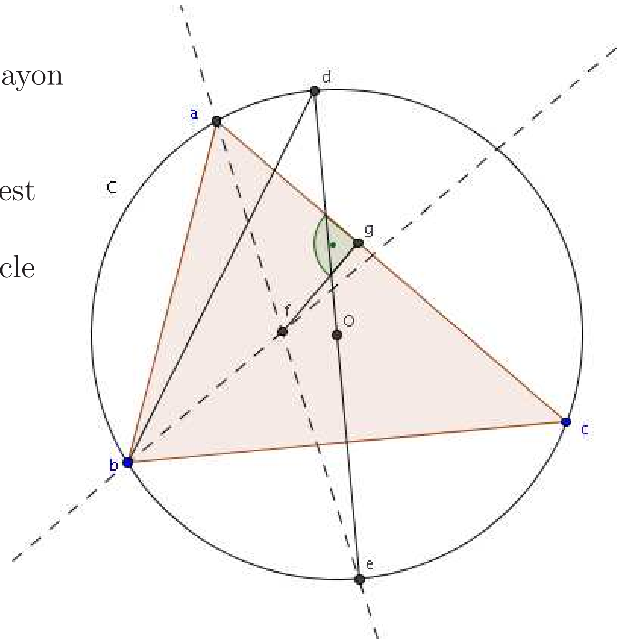
Définition 1 *Le cercle circonscrit d'un triangle est le cercle passant par les trois sommets. Il est unique . Les médiatrices de chaque côté se coupent en son centre.*

Définition 2 *Le cercle inscrit d'un triangle est le plus gros cercle que peut contenir le triangle . Il est unique . Les bissectrices intérieures de chaque angles du triangles se coupent en son centre.*

4.2 Démonstration de l'inégalité d'Euler

Tout d'abord nous alons poser :

- abc un triangle quelconque considéré
- C le cercle circonscrit à abc,O son centre et r' son rayon
- e appartenant à C et à la bissectrice issue de a
- d tel que O soit le milieu de [ed]
- f appartenant à [ae] et à la bissectrice issue de b (f est le centre du cercle inscrit)
- g le projeté orthogonal de f sur [ac].(g est sur le cercle inscrit)
- r le rayon du cercle inscrit



Lemme 1 *on a $fe.fa = 2rr'$.*

Démonstration 1 *Montrons tout d'abord les deux lemmes suivants :*

Lemme 2 *Les triangles dbe et agf sont semblables*

Lemme 3 *Le triangle fed est isocèle en e (i.e. fe=be) .*

Démonstration 2 *(lemme 2)*

On remarque que tout deux sont rectangles le premier en d (car de est le diamètre de C et b appartient à C) et le second en g (du fait qu'il est le projeté de f sur [ac].

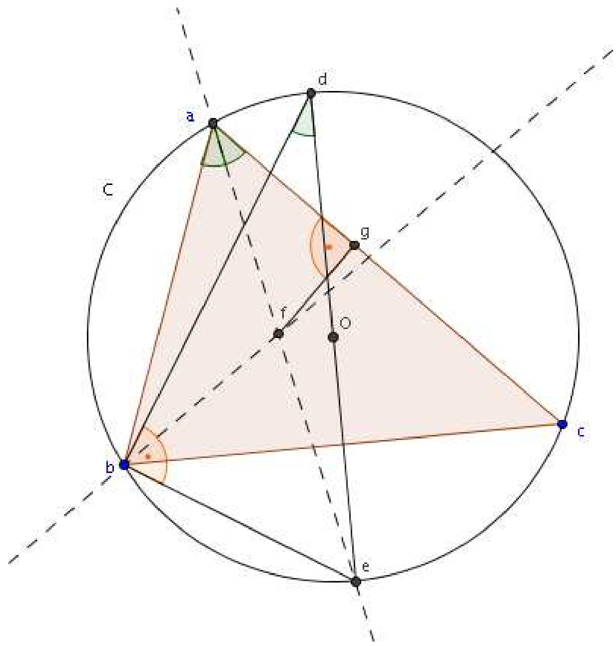
$$\widehat{agf} = \widehat{ebd} = \frac{\pi}{2} \tag{4.1}$$

Il suffit de trouver qu'ils ont un angle en commun pour démontrer qu'ils sont semblables. Comme (ae) est la bissectrice issue de a, on a :

$$\widehat{eab} = \widehat{cae} \tag{4.2}$$

Or comme a,d,b et e appartiennent à C on a :

$$\widehat{eab} = \widehat{edb} \tag{4.3}$$

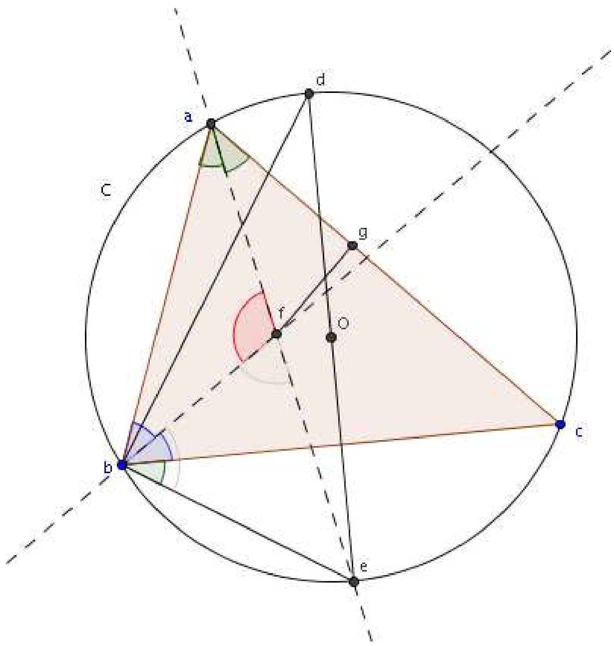


D'où par les égalités 7.3 et 7.3 on a :

$$\widehat{cae} = \widehat{edb} \tag{4.4}$$

Donc d'après les égalités 4.1 et 4.4 , on démontre que les triangles dbe et agf sont semblables.✓

Démonstration 3 *(lemme 3)*



Dans le triangle afb on a :

$$\widehat{afb} = \pi - \widehat{fba} - \widehat{baf} \tag{4.5}$$

Or les points a,e et f sont alignés donc :

$$\widehat{bfe} = \pi - \widehat{afb} \tag{4.6}$$

D'où par l'égalité 4.5 et 4.6 on a :

$$\widehat{bfe} = \widehat{fba} + \widehat{baf} \tag{4.7}$$

Sachant que (fb) est la bissectrice issue de b on a

$$\widehat{fba} = \widehat{fbc} \tag{4.8}$$

Sachant que (fa) est al bissectrice issue de a :

$$\widehat{baf} = \widehat{fac} \tag{4.9}$$

Sachant que les points a , b , e et c sont cocyclique car sur le cercle C :

$$\widehat{fac} = \widehat{cbe} \tag{4.10}$$

D'où par 4.9 et 4.10 on a $\widehat{baf} = \widehat{cbe}$. *et par 4.6 et 4.7 on obtient :*

$$\widehat{bfe} = \widehat{fbc} + \widehat{cbe} = \widehat{ebf}$$

Donc on en conclut que le triangle ebf est isocèle en e. ✓

Suite Démonstration 4 *On a donc par le lemme 2 :*

$$\frac{fa}{fg} = \frac{de}{be}$$

et par le lemme 3 :

$$fe = be$$

Or comme le cercle circonscrit est de centre O qui est aussi le milieu de [de] (d et e appartiennent à C) alors :

$$de = 2.r$$

Et comme le centre du cercleinscrit est f et g appartient au cercle inscrit , on a :

$$fg = r'$$

d'où

$$\frac{fa}{r'} = \frac{2.r}{fe}$$

ce qui donne :

$$fe.fa = 2rr'$$

✓

Propriété 1 *(Puissance d'un point par rapport à un cercle) La puissance d'un point I par rapport à un cercle C de centre O et de rayon R est donné par la formule :*
Pour tout A, et B deux points du cercle distincts telque A,I et B soient alignés alors on a :

$$AI.BI = R^2 - IO^2$$

Par cette proriété de la puissance en calculant la puissance du point f par rapport au cercle C (le cercle circonscrit à abc) on a :

$$fe.fa = r'^2 - fO^2$$

d'où par le lemme 1 on obtient :

$$2.rr' = r'^2 - fO^2$$

$$2.r = r' - \frac{fO^2}{r'}$$

comme $fO^2 > 0$ et $r' > 0$ alors $\frac{fO^2}{r'} > 0$ alors :

$$2.r \leq r'$$

L'inégalité d'Euler est ainsi démontrée. ✓

4.3 Cas d'égalité

Lemme 4 *Le cas d'égalité se constate si et seulement si fO=0 Par conséquent le centre du cercle inscrit doit correspondre au centre du cercle circonscrit. Le triangle abc doit être équilatéral.*

Démonstration 4 *Démontrons que chaque côté du triangle vaut $4(r'^2 + r^2)$. En sachant que g est le projeté de O sur [ac] (car f=O) alors comme O est le centre du cercle circonscrit , (gO) est la médiatrice de [ac].Donc :*

$$gc = \frac{1}{2}ac$$

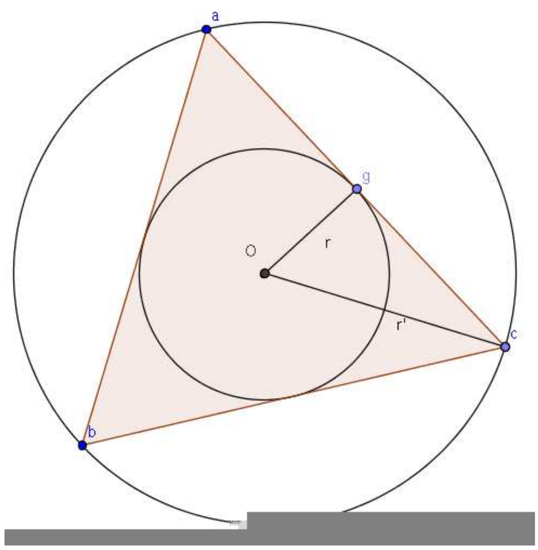
Or par pythagore :

$$Oc^2 = gc^2 + Og^2$$

Donc

$$ac = 4(r'^2 + r^2)$$

En procédant de la même manière c'est à dire en projetant O sur les autres côtés on démontre que chaque côtés du triangle vaut $4(r'^2 + r^2)$. Donc le triangle abc est équilatéral.✓



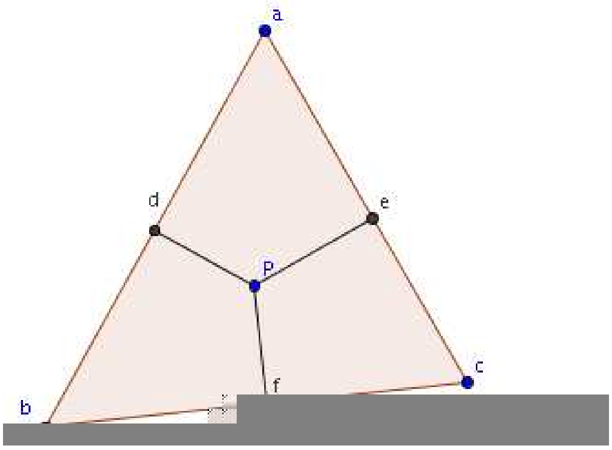
Chapitre 5

L'inégalité d'Erdös-Mordell

5.1 Présentation du problème

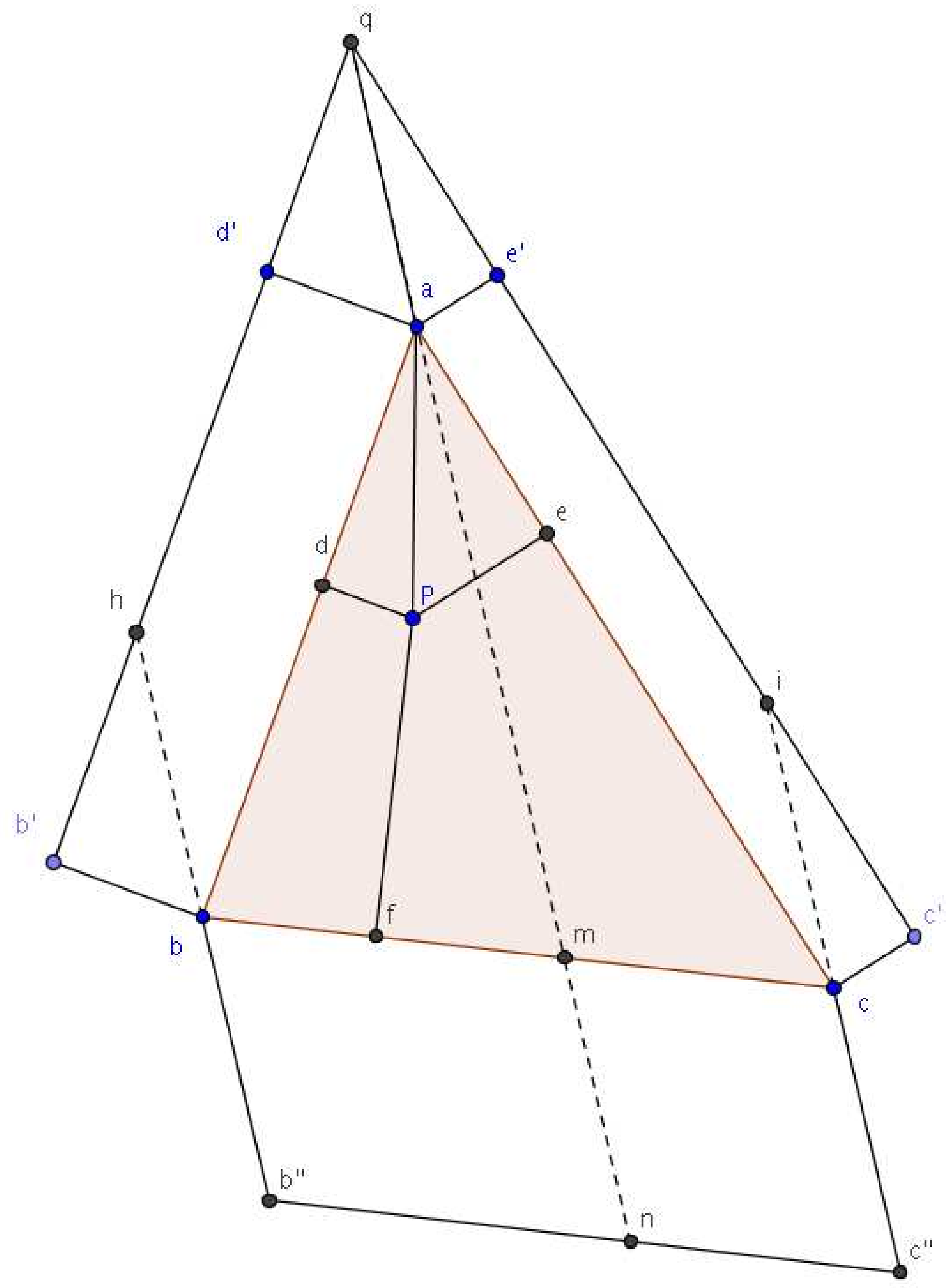
Problème 1 *Ils'agit de démontrer que pour tout abc triangle acutangle, un point p prit dans ce triangle, d (respectivement e et f) la projection de p sur [ab] (resp. [ac] et [bc]) alors :*

$$2(pd + pe + pf) \leq pa + pb + pc$$



5.2 Démonstration de l'inégalité d'Erdös-Mordell

Introduisons :



- b' et d' tels que le quadrilatère b'bad' soit un rectangle de largeur pe.
- c' et e' tels que le quadrilatère c'cae' soit un rectangle de largeur pd.
- q l'intersection de (b'd') et (c'e')
- c" et b" tels que [c"c] et [d"d] soit de même longueur et parallèles à [aq]
- m le point d'intersection de (aq) et (bc)
- n le point d'intersection de (aq) et (b"c")
- h le point d'intersection de (b'd') et (b"b)
- i le point d'intersection de (c"c) et (c'e')

Lemme 1 *On a :*

$$pa = qa$$

Démonstration 1 *Par le fait que acc'e' et abb'd' soient des rectangles on a*

$$\begin{aligned} ae' &= cc' \\ ad' &= bb' \end{aligned} \tag{5.1}$$

quadrilatère ae'qd'	*quadrilatère pdae*	*justifications*
ae'	*pd*	*par construction*
d'a	*ep*	*par construction*
(1) $\widehat{ae'q}(=\frac{\pi}{2})$	$\widehat{pda}(=\frac{\pi}{2})$	*ae'c'c rectangle et q* ϵ *(c'e')*
(2) $\widehat{ae'q}(=\frac{\pi}{2})$	$\widehat{pda}(=\frac{\pi}{2})$	*d'b'ba rectangle et q* ϵ *(b'd')*
(3) $\widehat{d'ae'}$	$\widehat{epd}$	*(pe) // (ae'),(pd) // (ad')*
$\widehat{d'qe'}$	$\widehat{ead}$	*(1) + (2) + (3)*

Du fait que les longueurs égales (deux premières lignes) sont des côtés adjacents et que les égalités de tous les angles entre les deux quadrilatères, ils sont isométriques et semblables. Donc on en déduit qa=pa. ✓

Lemme 2 *On a :*

- *pe.ba +pd.ca* $\leq$ *pa.bc*
- *pf.ba + pd.bc* $\leq$ *pb.ca*
- *pe.bc + pf.ca* $\leq$ *pc.ba*

Démonstration 2 *soit* $\mathcal{A}$ *l'aire de bb'd'a(jaune) , alors* $\mathcal{A}$ *est l'aire de qabh(rose), en effet comme qabh est un parallélogramme par construction (voirlemme (1) . Son aire est donc ba.k , avec k la distance entre (qh) et (ab), qui vaut bb'. On obtient donc l'égalité voulue.* $\mathcal{A}$*est aussi l'aire de b"nmb(vert), en effet (mn)=(qa) et (hb)=(bb") et bb"=hb=qa et mn = bb" car sinon (bm) et (b"n) ne serait pas parallèles et donc cc"≠bb" ce qui est faux par la contruction que l'on a fait de c" et b". Donc l'aire de bb"mn (vert) vaut l'aire de b'bad' (jaune) qui vaut donc bb'.ba.*

Par le même procédé, on trouve que l'aire de cc"nm vaut l'aire de cc'e'a qui vaut donc cc'.ca.

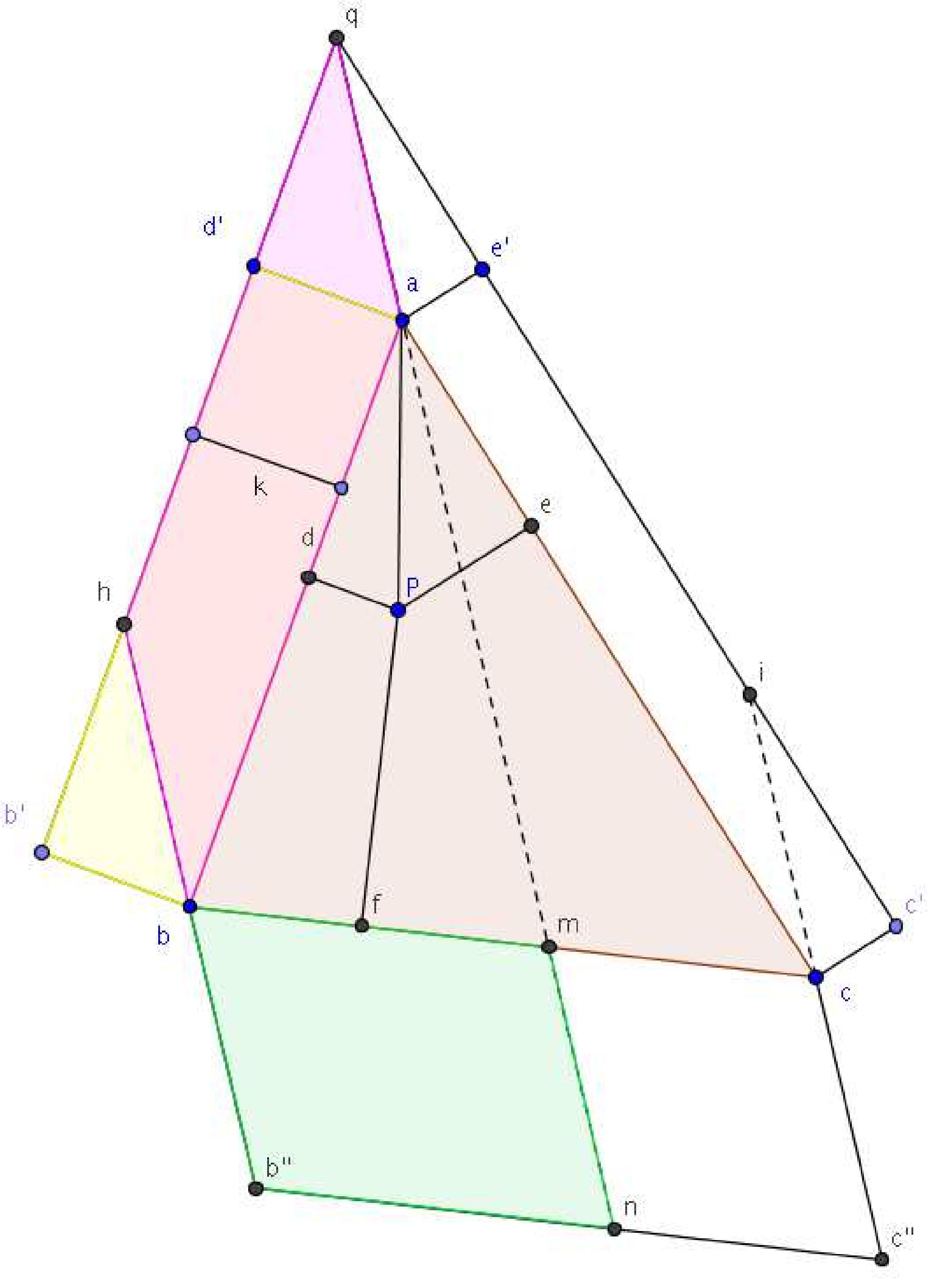
Donc l'aire de bb"c"c est la somme de ces deux aires soit bb'.ba + cc'.ca .Comme cc"b"b est un parallélogramme son aire est « majorée » par cc".bc, en effet car la distance entre (cb) et (c"b") est plus petite (égale si c'est un rectangle) que cc".

On obtient l'inégalité suivante : bb'.ba + cc'.ca $\leq$ *cc".bc qui n'est autre que : pe.ba +pd.ca* $\leq$ *pa.bc*

De la même manière que précédemment on trouve les inégalités :

- *pf.ba + pd.bc* $\leq$ *pb.ca*
- *pe.bc + pf.ca* $\leq$ *pc.ba*

✓



Lemme 3 *Pour x≥0 on a :*

$$\frac{1}{x} + x \geq 2$$

Démonstration 3 *En effet il suffit de poser $y^2 = x$ et on a :*

$$(\frac{1}{y} - y)^2 \geq 0$$

d'où :

$$\frac{1}{y^2} + y^2 - 2 \geq 0$$

soit

$$\frac{1}{x} + x \geq 2$$

✓

Par le lemme 2 on obtient donc :

$$\begin{aligned} pe.\frac{ba}{bc} + pd.\frac{ca}{bc} &\leq pa \\ pf.\frac{ba}{ca} + pd.\frac{bc}{ca} &\leq pb \\ pe.\frac{bc}{ba} + pf.\frac{ca}{ba} &\leq pc \end{aligned}$$

d'où

$$pd.(\frac{ca}{bc} + \frac{bc}{ca}) + pe.(\frac{ba}{bc} + \frac{bc}{ba}) + pf.(\frac{ba}{ca} + \frac{ca}{ba}) \leq pa + pb + pc$$

Donc par le lemme 3 on a :

$$2.pd + 2.pe + 2.pf \leq pd.(\frac{ca}{bc} + \frac{bc}{ca}) + pe.(\frac{ba}{bc} + \frac{bc}{ba}) + pf.(\frac{ba}{ca} + \frac{ca}{ba}) \leq pa + pb + pc$$

d'où l'inégalité d'Erdös-Mordell :

$$2.pd + 2.pe + 2.pf \leq pa + pb + pc$$

5.3 Cas d'égalité

Propriété 1 *Il y a cas d'égalité dans l'inégalité d'Erdös-Mordell si et seuelement si le triangle est équilatéral et que p est le centre du cercle circonscrit au triangle.*

Démonstration 4 *Nous allons démontrer les deux conditions du cas d'égalité . Voici les deux lemmes qui vont suivre.*

Lemme 4 *Dans le cas d'égalité d'Erdös-Mordell , le triangle est nécéssairement équilatéral*

Démonstration 5 *Comme nous avons « utilisé » l'inégalité du lemme 3 il faut donc être dans le cas d'égalité, donc*

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + x &= 2 \\ 1 + x^2 &= 2x \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Ce qui correspond aux inégalités suivantes

$$\begin{aligned} pe.\frac{ba}{bc} + pd.\frac{ca}{bc} &\leq pa \\ pf.\frac{ba}{ca} + pd.\frac{bc}{ca} &\leq pb \\ pe.\frac{bc}{ba} + pf.\frac{ca}{ba} &\leq pc \end{aligned}$$

que ca=bc , ba=bc et ba=ca soit ba=ca=bc donc que le triangle soit équilatéral. ✓

Nous avons donc montré la nécessité que le triangle abc soit équilatéral.

Lemme 5 *Si le triangle est équilatéral , alors il y a égalité si et seulement si p est le centre du cercle circonscrit au triangle.*

Démonstration 6 *On voit que l'aire du parallélogramme bcc"b" vaut mn.bb" si et seulement si (mn) est perpendiculaire à (bc)' soit il faut que (aq) soit perpendiculaire à (bc), et comme le triangle est équilatéral il faut que (aq) soit confondue avec la hauteur du triangle abc issue de a. Et cette hauteur est aussi la médiatrice de [bc] et la bissectrice issue de a.*

De plus on a

$$\begin{aligned} \widehat{aqe'} &= \widehat{mac} \\ \widehat{d'qa} &= \widehat{dam} \end{aligned} \tag{5.2}$$

et comme (qa) est la bissectrice issue de a :

$$\widehat{mac} = \widehat{dam} \tag{5.3}$$

donc par les égalités 5.2 et 5.3 on a :

$$\widehat{aqe'} = \widehat{d'qa}$$

En posant : $j = \widehat{d'qa}(= \widehat{aqe'})$ *on a* $d'q = \cos(j).qa$ *et* $e'q = \cos(j).qa$ *donc on en conclut que :*

$$d'q = e'q$$

donc on a :

$$pe = pd$$

donc p appartient à la bissectrice issue de a .

On montre de la même manière que p appartient par nécessité et suffisance aussi aux bissectrices issue de b et c, donc p est le centre du cercle circonscrit (les bissectrices étant confondues avec les médiatrices car abc est un triangle équilatéral). ✓

Deuxième partie

Le problème isopérimétrique

Chapitre 6

Un aperçu historique

6.1 Introduction

Aussi appelé problème de Didon, le problème isopérimétrique date vraisemblablement du $IX^{ème}$ siècle avant Jésus-Christ. Après l'assassinat de son époux par son frère Pygmalion , la reine Elyssa (appelée Didon par les Romains) dut s'enfuir.

Elle accosta à Byrsa (signifant peau , situé en Tunisie) et obtient l'asile auprès des autochtones. On lui céda que ce que pourrait couvrir la peau d'un boeuf.Elle découpa la peau en fine lanière et obtient une longueur de 4 km , et elle disposa cette corde affin d'obtenir la plus grande surface possible.Elle obtint un demi-cercle.

(Certains historiens rejettent cependant cette tradition littéraire et datent la fondation de la cité du milieu du $VIII^{ème}$ siècle.)

Ce problème consiste à vouloir la figure de plus grande surface possible étant donné un périmètre fixé.La solution est connue et est le cercle .

La première solution (incomplète) fut apportée par Zénodore ($II^{ème}$ siècle av J.C.) avec des outils de géométrie élémentaire. En 1836 Steiner la simplifia de manière concrète sans jamais la compléter.

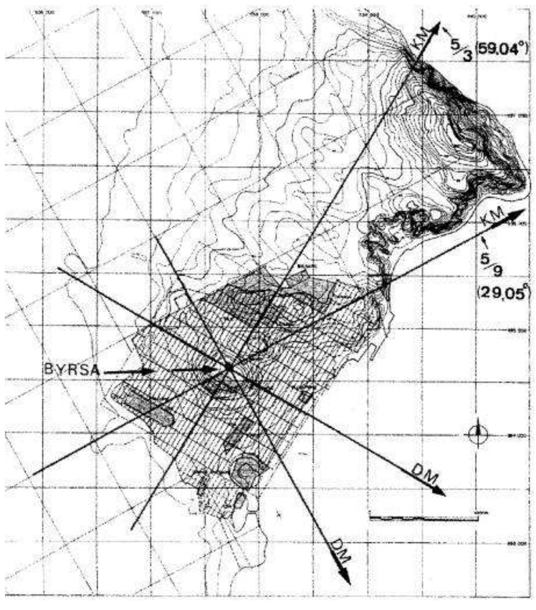


Fig.11. Orientation des cadastres de Carthage.
(carte d'après A. Ennabli)

Il fallut attendre Weierstrass en 1870 pour avoir une preuve complète du problème par le calcul des variations.Néanmoins une preuve par les séries de Fourier (par notament l'inégalité de Wirtinger) de Hurwitz apparu en 1901.

Nous développerons historiquement les trois premières contributions de ces mathématiciens de manière chronologique. Ensuite nous montrerons les différentes preuves.

6.2 Un début de démonstration ...

Zénodore montra la maximalité de l'aire du polygone régulier à n côté parmis ceux à n côtés de même périmètre au $II^{ème}$ siècle avant Jésus-Christ.J'invite le lecteur à lire le chapitre 7 , les démonstrations ne faisant pas intervenir le calcul différentiel sont celles que Zénodore utilisa. Il prouva donc la formule pour le polygone à n côtés donnée par :

Pour tout polygone à n côté de périmètre p , son aire $\mathcal{A}$ est majorée comme suit :

$$\mathcal{A} \leq \frac{p^2}{4.n.tan(\frac{\pi}{n})}$$

Sachant que l'aire $\mathcal{A}'$ du polygone régulier à n côté de périmètre p vaut

$$\mathcal{A}' = \frac{p^2}{4.n.tan(\frac{\pi}{n})}$$

Zénodor s'aida des travaux d'Archimède pour conclure ses travaux sur l'inégalité isopérimétrique notament la méthode d'exhaustion.

La méthode exhaustive repose sur ce principe (souvent appelé axiome d'Archimède) : En soustrayant de la plus grande de deux grandeurs données plus de sa moitié, et du reste plus de sa moitié, et ainsi de suite, on obtiendra une grandeur moindre que la plus petite.

Par *on obtiendra*, on sous-entend là au bout d'un nombre fini de fois. Ce principe dichotomique évite un délicat passage à la limite, donc l'introduction du concept d'infiniment petit ou d'infiniment grand posant autant de problèmes mathématiques que philosophiques. Il faudra traverser les siècles pour aboutir à une mise en place satisfaisante du calcul "infinitésimal".

Ainsi Zénodore s'y prit de la façon suivante : Pour une courbe C de périmètre p entourant une Aire S , on "approche" la courbe C par des polygones g_n non forcément réguliers ayant de plus en plus de côtés. Approcher signifiant que la suite des périmètres q_n des g_n tenra vers p et que la suites $\mathcal{A}_n$ des aires tendra vers S.

Pour tout n , on a par l'inégalité isopérimétrique précédente :

$$\mathcal{A}_n \leq \frac{{q_n}^2}{4.n.tan(\frac{\pi}{n})} \leq \frac{{q_n}^2}{4\pi}$$

L'inégalité précédente montre que si n tend vers l'infini alors :

$$S \leq \frac{p^2}{4\pi}$$

Il suffit ensuite de remarquer que $\frac{p^2}{4\pi}$ est l'aire délimitée par le cercle de périmètre p.

Cette inégalité dès l'époque de Zénodor fut utilisée pendant des siècle et pourtant ce raisonnement reste incomplet. Il n'apporte en aucun cas l'existence d'une limite et l'existence d'une topologie où l'aire et le périmètre se comporte dans l'approximation de manière continue. En effet pour donner une définition générale de la longueur d'un arc, il faut commencer par formaliser la notion de distance , ici dans le cadre d'un espace euclidien. On sait alors mesurer la longueur de courbes simples : les lignes polygonales.

Mais cette notion n'est pas suffisante pour la notion de mesure de courbes.

Il faut savoir qu'en réalité le traité sur les figures isopérimétriques écrit par Zénodore a disparu , et ce que l'on sait de ses travaux est dû à Théon d'Alexandrie dans son commentaire sur l'Almageste et par Pappus dans son livre V. On sait en plus que Zénodore montra de la même manière que la sphère était le solide de plus grand volume pour une surface donnée.La preuve complète n'arrivant elle aussi que beaucoup plus tard.

6.3 ... des conditions nécéssaires plus simple ...

Jakob Steiner (18 mars 1796-1er avril 1863) était un mathématicien suisse.Il a travaillé notament sur les courbes et surfaces algébriques.

Dans son Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, il a créé les bases de la géométrie synthétique moderne. Dans ce livre également, dont malheureusement un seul volume est paru sur les cinq prévus, on trouve pour la première fois le principe de dualité présenté dès le début comme conséquence immédiate des propriétés les plus fondamentales du plan, de la ligne et du point.

Steiner n'a pas résolu le problème isopérimétrique mais il a trouvé des conditions nécéssaires que la solution doit vérifier. Il a donc démontré les propriétés suivantes que la solution du problème possède :

- La figure est convexe.
- Tous points a et b sur le bord de la figure partageant le périmètre de celle-ci en deux , le segment [ab] partage l'aire.
- Soient deux points a et b sur le bord de la figure partageant le périmètre de celle-ci , pour tout point c sur le bord de la figure ,l'angle $\widehat{acb}$ vaut $\frac{\pi}{2}$.

J'invite le lecteur à regarder le chapitre 8 , pour décourvrir les démonstrations de Steiner quant à ces conditions.

6.4 ..et une démonstration complète

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, habituellement appelé Karl Weierstrass (31 octobre 1815 - 19 février 1897) fut souvent cité comme le « père de l' analyse moderne ».

Il consolida des travaux de Cauchy sur les nombres irrationnels et leur amena une nouvelle compréhension. Ses travaux les plus connus portent sur les fonctions elliptiques.

La démonstration qu'il donna au problème isopérimétrique utilise des notions modernes qui n'ont rien à voir avec de la géométrie élémentaire.Elle utilise la notion d'intégrale , d'équation différentielle (notament les équations différentielles d'Euler).

Chapitre 7

Pour les polygones dans le plan

7.1 Présentation du problème

Il s'agit de démontrer la propriété suivante :

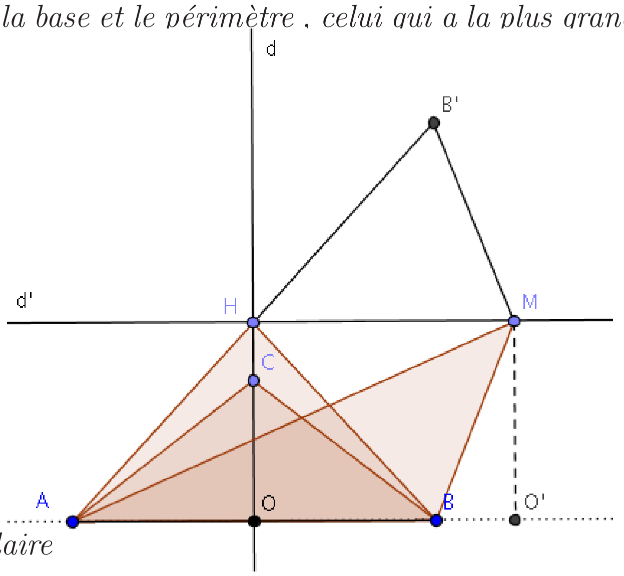
Propriété 1 *De tous les polygones possédant au plus n côtés ,d'un périmètre p fixé , le polygone régulier à n côtés est le seul à posséder la plus grande aire. Il en résulte en notant $\mathcal{A}$ l'aire du polygone , l'inégalité isopérimétrique suivante :*

$$\mathcal{A} \leq \frac{p^2}{4.ntan(\frac{\pi}{n})}$$

Nous développerons le problème en trois sections réparties comme suit : les triangles , les quadrilatères et les polygones à n côtés ($n \geq 5$) .

7.2 Pour les triangles

Propriété 2 *Parmi tout les triangles dont on a fixé la base et le périmètre , celui qui a la plus grande aire est le triangle isocèle.*



Démonstration 1 *Soit A et B deux points du plan . Nous considérerons que la base de tout les triangles est égale à AB et que le périmètre est de p.*

Posons C tel que ABC soit un triangle isocèle. et posons M tel que AM+BM $= 2.AC$ (le triangle ABM est de même périmètre que le triangle ABC).Et $M \neq C$. Posons O milieu de [AB](le pied de la hauteur issue de C dans ABC), O' le pied de la hauteur issue de M dans le triangle ABM.

Soit d la mediatrice de [AB]. Soit d' la perpendiculaire à d passant par H. Soit B' le symétrique de B par rapport à la droite d' Posons $\mathcal{A}_{ABC}$ l'aire de ABC. et $\mathcal{A}_{ABM}$ l'aire de ABM.

Lemme 2 *Si* $MO' = OH > OC$ *alors* $MA + MB \neq AC + CB$.

Démonstration 2 *Le triangle AHB étant isocèle et O le mileu de AB alors :*

$$\widehat{AHO} = \widehat{OHB}$$

Par la symétrie d'axe d' on a :

$$\widehat{BHM} = \widehat{MHB'}$$

Or on a d' $\perp$ *d alors :*

$$\widehat{OHM} = \frac{\pi}{2}$$

Donc

$$\widehat{AHO} + \widehat{OHB} + \widehat{BHM} + \widehat{MHB'} = \pi$$
$$\widehat{AHB'} = \pi$$

Les points A,H et B sont donc alignés. Comme HB=HB' et MB=MB' on a : D'une part :

$$HA + HB = HA + HB' = AB'$$

D'autre part :

$$AM + MB = AM + MB'$$

Donc par inégalité triangulaire :

$$HA + HB < AM + MB' \tag{7.1}$$

Deplus on a par le fait que $CO < HO$ *:*

$$AC + CB < AH + HB$$

Donc par 7.1 on a

$$AC + CB < AM + MB' = AM + MB$$
$$AC + CB < AM + MB$$

✓

Donc on sait que la hauteur OC du triangle isocèle est la hauteur maximale, il faut démontrer que le triangle de hauteur maximale pour un périmètre fixé est seulement le triangle isocèle.

Lemme 3 *Le triangle dont la hauteur est maximale pour un périmètre fixé et une base fixée est le triangle isocèle.*

Démonstration 3 *Toujours sur le même dessin. Considérons le triangle AHB et le triangle AMB qui ont tout les deux , la même hauteur maximale et la même base. Démontrons que AMB n'est pas de même périmètre que le triangle AHB. On sait que :*

$$AH + HB = AH + HB' = AB'$$

et

$$AM + MB = AM + MB'$$

Par inégalité triangulaire on a :

$$AM + MB' > AB'$$

Donc

$$AM + MB > AH + HB$$

Donc contradiction. Le triangle de hauteur maximale est donc le triangle isocèle. ✓

Suite Démonstration 5 *Par le dernier lemme 3 on démontre que de tout triangle dont on a fixé le périmètre et la base , celui de plus grande hauteur est le triangle isocèle , ce qui donne que le triangle isocèle est celui de plus grande d'aire aussi.* ✓

Propriété 3 *Parmi tout les triangles dont on a fixé le périmètre , celui qui a la plus grande aire est le triangle équilatéral*

Démonstration 4 *Supposons ABC le triangle d'aire maximale. Si le triangle ABC n'est pas équilatéral , alors il possède deux côtés de longueur différentes par exemple AB et AC. D'après la propriété 2 , on peut construire un triangle A'BC isocèle en A' , de même périmètre que ABC et qui a une aire plus grande, car en effet le triangle ABC n'est pas isocèle en A. Ce qui est impossible , car le triangle ABC est d'aire maximale. Donc le triangle ABC est équilatéral.*

Remarque 5 *Son aire vaut*

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= base.\frac{hauteur}{2} \\ &= \frac{p}{3}.\cos(\frac{\pi}{6}).\frac{p}{3}.\frac{1}{2} \\ &= \frac{p^2}{12.\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Donc on peut noter que l'inégalité isopérimétrique pour un triangle de périmètre p fixé et d'aire $\mathcal{A}$ *est :*

$$\mathcal{A} \leq \frac{p^2}{12.\sqrt{3}}$$

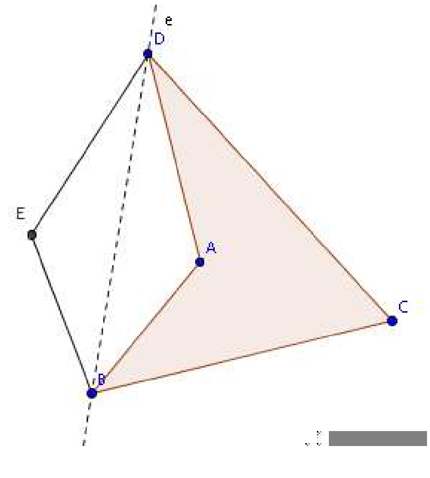
7.3 Pour les quadrilatères

Propriété 1 *Parmi tous les quadrilatères d'un périmètre p fixé , le carré est celui de plus grande aire.*

Démonstration 1 *Soit ABCD un quadrilatère ayant un périmètre p et qui serait d'aire maximale.*

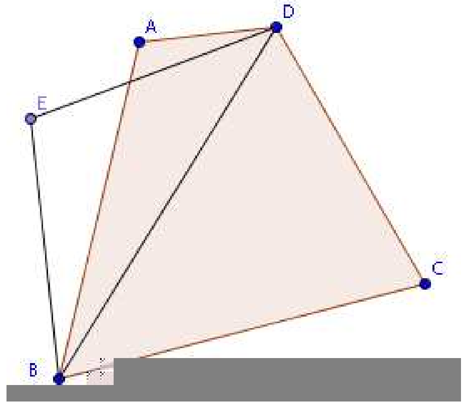
Lemme 2 *ABCD est convexe.*

Démonstration 2 *Sinon il existe deux sommets, B et D par exemple , tel que le segment [BD] ne soit pas contenu dans le quadrilatère. Posons E le symétrique de A par rapport à la droite (DB) . On remarque que le quadrilatère BCDE à la même périmètre que ABCD , mais pourtant il a une aire plus grande.*



Lemme 3 *Deux côtés consécutifs sont de même longueurs.*

Démonstration 3 *Supposons par exemple que AB≠AD . Posons E tel que DEB soit isocèle en E et de même périmètre que ADB et que le quadrilatère EBCD soit convexe. On a (suivant la notation des aires) :*



$$\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{ADB} + \mathcal{A}_{DCB}$$

$$\mathcal{A}_{DEBC} = \mathcal{A}_{DEB} + \mathcal{A}_{DCB}$$

Or le triangle DEB est iscèle en E et de même périmètre et de même base DB que le triangle ADB alors par le résultat sur les triangles on a :

$$\mathcal{A}_{ADB} < \mathcal{A}_{DEB}$$

Donc on a

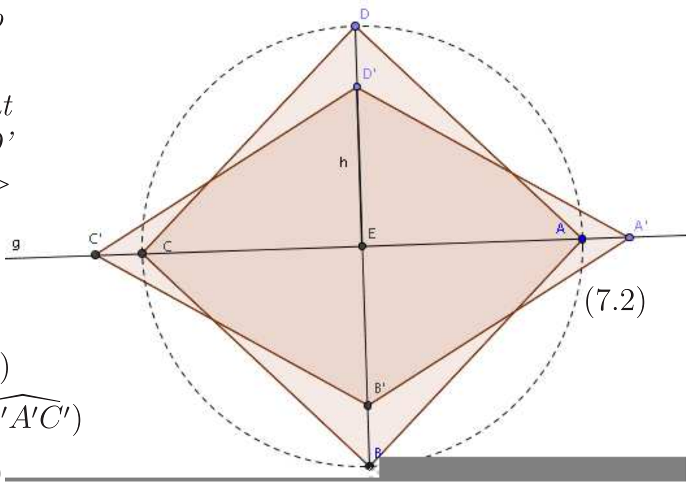
$$\mathcal{A}_{ABCD} < \mathcal{A}_{DEBC}$$

Donc chaque côtés consécutifs sont de même longueur ce qui est équivalent à ce que tous les côtés soient de même longueur.

Lemme 4 *Le quadrilatère d'aire maximale et de périmètre fixé est un carré.*

Démonstration 4 *Considérons le lemme 3 donc po être un losange.*

Soit deux quadrilatères ABCD et A'B'C'D' qui ont le même périmètre , ABDC est un carré , A'B'C'D' est un losange non carré. Montrons que $\mathcal{A}_{ABCD} > \mathcal{A}_{A'B'C'D'}$ on a :



$$\mathcal{A}_{ABCD} = AD.AB = (\frac{p}{4})^2 = \frac{p^2}{16} \tag{7.2}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{A'B'C'D'} &= A'C'.h = A'C'.A'D'.\sin(\widehat{D'A'C'}) \\ &= 2.A'D'.\cos(\widehat{D'A'C'}).A'D'.\sin(\widehat{D'A'C'}) \\ &= (\frac{p}{4})^2.2.\cos(\widehat{D'A'C'}).\sin(\widehat{D'A'C'}) \\ &= (\frac{p}{4})^2.\sin(2.\widehat{D'A'C'}) \end{aligned} \tag{7.3}$$

Donc on a par 7.3 et 7.3 :

$$\mathcal{A}_{A'B'C'D'} = A_{ABCD}.\sin(\widehat{D'A'B'})$$

D'où comme A'B'C'D' n'est pas un carré alors $\widehat{D'A'B'} \neq \frac{\pi}{2}$ Donc $\sin(\widehat{D'A'B'}) < 1$

$$\mathcal{A}_{A'B'C'D'} < A_{ABCD}$$

Donc le carré est d'aire maximale.✓

On a bien démontré que le carré est nécéssairement le quadrilatère d'aire maximale pour un périmètre fixé.✓

Remarque 6 *Son aire vaut*

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= (\frac{p}{4})^2 \\ &= \frac{p^2}{16}\end{aligned}$$

Donc on peut noter que l'inégalité isopérimétrique pour un quadrilatère de périmètre p fixé et d'aire $\mathcal{A}$ est :

$$\mathcal{A} \leq \frac{p^2}{16}$$

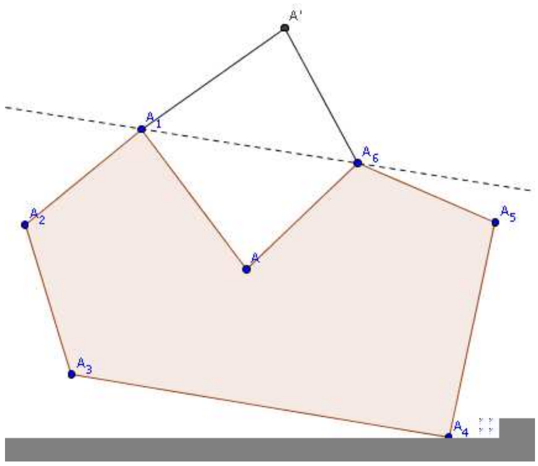
7.4 Pour les polygônes à n côtés (n≥5)

Propriété 1 *Parmi tous les polygônes à n côtés d'un périmètre p fixé , le polygône régulier est celui de plus grande aire.*

Démonstration 1 *Notons $A_1A_2A_3...A_n$ le polygone à n côtés d'aire maximale.*

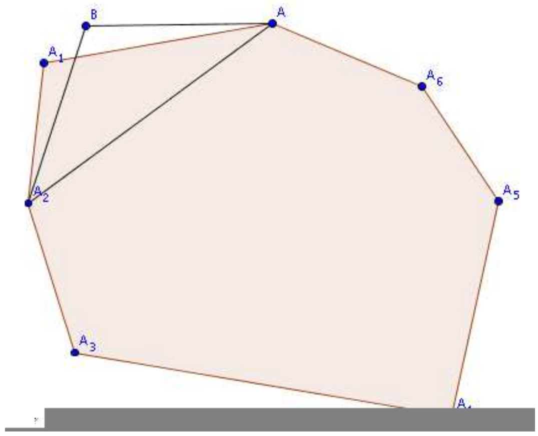
Lemme 2 *$A_1A_2A_3...A_n$ est convexe.*

Démonstration 2 *De manière identique que pour les quadrilatères on prouve que le polygone est convexe.*✓



Lemme 3 *Les côtés de $A_1A_2A_3...A_n$ sont de même longueur.*

Démonstration 3 *De manière identique que pour les quadrilatères on prouve que les côtés sont de même longueur.* ✓

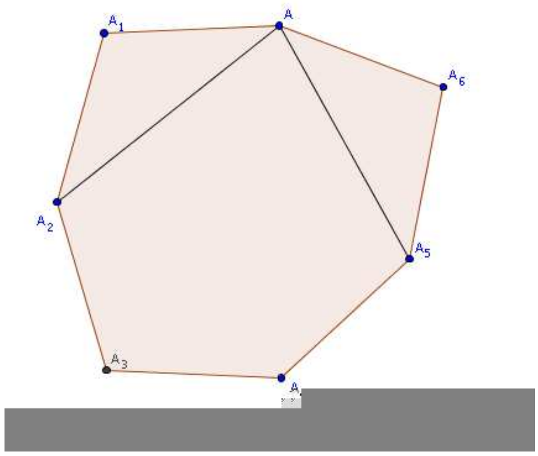


Lemme 4 *Les angles formés par les côtés consécutifs sont identiques*

Démonstration 4 *La démonstration de ce lemme se base sur un autre lemme dont nous ferons la preuve en fin de partie :*

Lemme 5 *Soit deux triangles ABC et DEF isocèles qui ne sont pas semblables tels que AB=AC=DE=FE. On peut construire C' et D' telque :*

- *ABC' et D'EF sont semblables et isocèles*
- $(AB + AC + BC) + (DE + FE + DF)$
  $= (AB + BC' + AC') + (D'E + FE + D'F)$
- $\mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{DEF} < \mathcal{A}_{ABC'} + \mathcal{A}_{D'EF}$

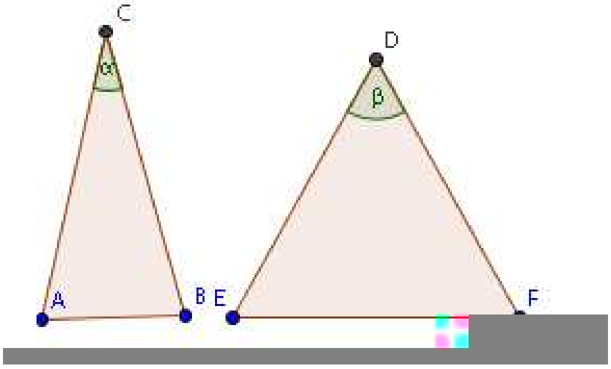


Donc en prenant en compte les triangles AA_1A_2 et AA_6A_5 qui sont isocèles et qui ont deux côtés en commun chacun. Alors par le résultat précédant on obtient que les angles $\widehat{A_2A_1A}$ et $\widehat{AA_6A_5}$ doivent être égaux.En remplacant le triangle AA_6A_5 par $A_6A_5A_4$ et ainsi de suite ,on montre que tous les angles intérieurs sont égaux.✓

Donc d'après tous les lemmes cités ci-dessus 2 , 3 et 4 , le polygone d'aire maximale est le polygone régulier.✓

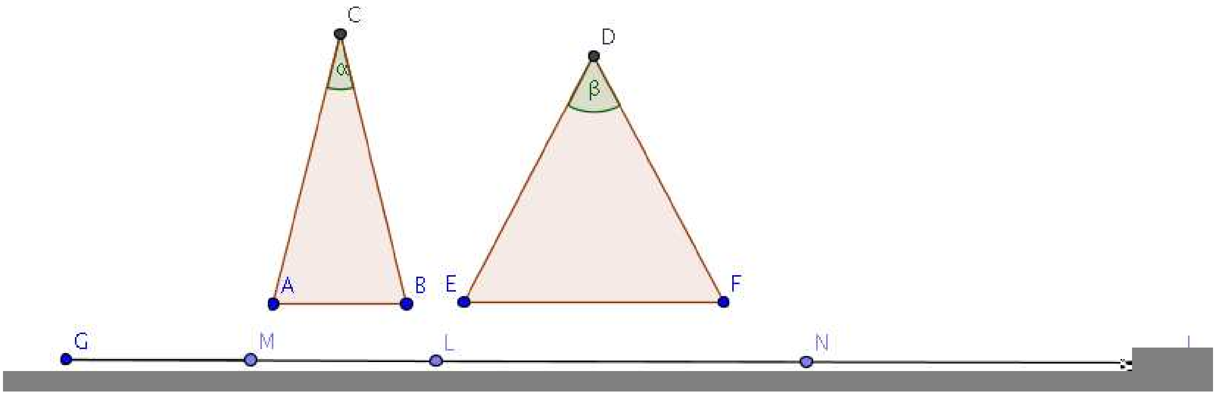
Démonstration 5 *(lemme 5) Il existe deux manières de démontrer ce lemme ,*
Voici la première méthode à la manière de Zénodore :

Soit deux triangles ABC et DEF isocèles mais non semblables dont le périmètre global vaut p.



On veut construire C' et D' telque :

- *ABC' et D'EF sont semblables et isocèles*
- $(AB + AC + BC) + (DE + FE + DF) = (AB + BC' + AC') + (D'E + FE + D'F)$
- *et montrer* $\mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{DEF} < \mathcal{A}_{ABC'} + \mathcal{A}_{D'EF}$



Construisons-les.

Soit G et J tel que

$$GJ = AC + CB + ED + DF. \tag{7.4}$$

Construisons L sur [GJ] tel que $\frac{GL}{LJ} = \frac{AB}{EF}$ *ie*

$$\frac{GL}{LJ} = \frac{AB}{EF} \text{ (} ie \quad L = bar\{(G, EF), (J, AB)\} \text{)} \tag{7.5}$$

Sans perte de généralité , on peut supposer AB<EF ce qui implique par 7.5 que

$$GL < LJ. \tag{7.6}$$

Or $AC + CB > AB$ *et* $ED + DF > EF$ *alors par 7.4 :*

$$GJ > AB + EF \text{ (} et\ GL + LJ > AB + EF) \tag{7.7}$$

On a aussi par 7.5 :

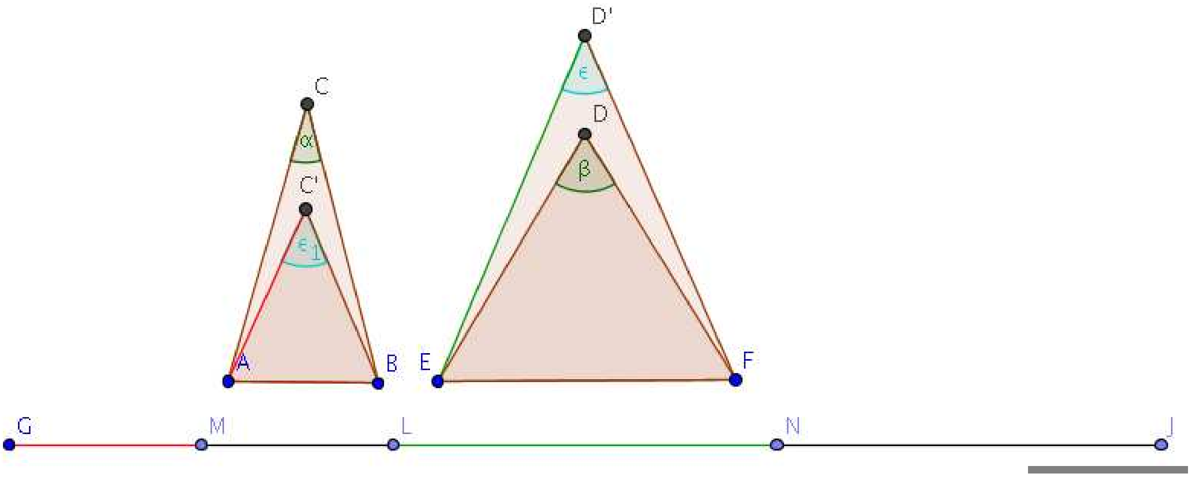
$$GL.EF = AB.LJ \tag{7.8}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}
(GL+LJ).EF &> (AB+EF).EF \text{ par } (7.7)\\
GL.EF+LJ.EF &> (AB+EF).EF\\
AB.LJ+LJ.EF &> (AB+EF).EF \text{ par } (7.8)\\
LJ.(AB+EF) &> (AB+EF).EF\\
LJ &> EF
\end{aligned}$$

Donc par 7.5 et 7.9 on a LJ>EF et AB<GL

Notons M le milieu de [GL] et N le milieu de [LJ]. Construisons les points C' et D' tels que les triangles ABC' et EFD' soit isocèles en C' et D' , et que : $AC' = C'B = GM = ML$ *et* $ED' = D'F = LN = NJ$



on a par 7.4 :

$$\frac{GL}{LJ} = \frac{AB}{EF}$$

d'où

$$\frac{2.AC'}{2.ED'} = \frac{AB}{EF}$$

donc

$$\frac{AC'}{ED'} = \frac{AB}{EF}$$

et de même

$$\frac{C'B}{D'F} = \frac{AB}{EF}$$

Donc les triangles ABC' et ED'F sont semblables et isocèles .

Par 7.4 on a

$$GJ = AC + CB + ED + DF$$

mais par définition

$$GJ = GM + ML + LN + NJ$$

ce qui veut dire que

$$GJ = AC' + C'B + ED' + D'F$$

donc

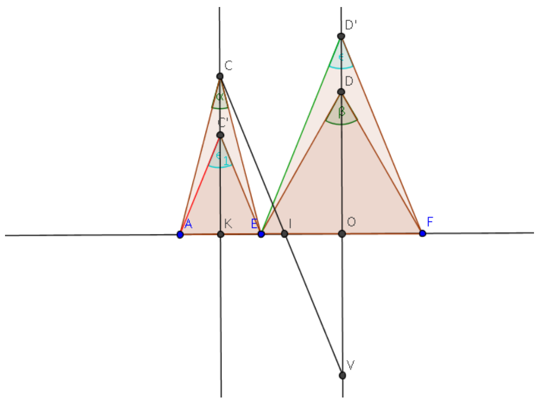
$$\underline{(AB + AC + BC) + (DE + FE + DF) = (AB + BC' + AC') + (D'E + FE + FD')} \tag{7.9}$$

Déplaçons le triangle DEF (et ED'F) quitte à confondre le point B et E.Alignons A,B,F (et E) sur une même droite. ABC et ABC' étant isocèle en C et C' alors la droite (CC') est la médiatrice de [AB]. De même que la droite (DD') est la médiatrice de [EF]. Notons

- *K le milieu de [AB]*
- *O le milieu de [EF]*
- *V le symétrique de D par rapport à (EF)*
- *I l intersection entre (AF) et (VC)*

Comme on a supposé $AB = AE < EF$ *et que et que* $AC = EC = ED = DF$ *, on a donc*

$$\widehat{DEF} < \widehat{CBA}$$



d'où comme

$$\widehat{VEF} = \widehat{DEF}$$

alors

$$\widehat{VEF} < \widehat{CBA}$$

on a aussi par les angles alternés

$$\widehat{VIF} = \widehat{CIA}$$

on sait que $AC + CE + DE + DF = AC' + C'E + D'E + D'F$ *de 7.9.*
Donc

$$CE + ED = C'E + ED' \tag{7.10}$$

Or comme V est le symétrique de D par (AF) on a

$$ED = EV \tag{7.11}$$

et

$$CE + EV > CV \text{ par inégalité triangulaire} \tag{7.12}$$

D'où par 7.10 et 7.12 on a :

$$C'E + ED' > CV \tag{7.13}$$

Calculons

$$\begin{aligned}(C'E + ED')^2 &= C'E^2 + ED'^2 + 2.C'E.ED' \\ &= C'K^2 + KE^2 + EO^2 + OD'^2 + 2.C'E.ED' \text{ par Pythagore} \\ &= (C'K + OD')^2 + (EO + EK)^2 + 2.(C'E.ED' - EO.EK - C'K.OD')\end{aligned} \tag{7.14}$$

Les triangles AC'B et ED'F sont semblables donc les triangles D'OE et C'KE sont semblables également.

Lemme 6 *Si ABC rectangle en A et AED rectangle en A et ABC semblable à AED alors $BC.ED–AB.AE–AC.AD =$* 0

Démonstration 6 *En effet comme ils sont semblables on a :*

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{DE}{CB}$$

et donc on a

$$AC = AD.\frac{CB}{DE}\ ,\ AB = AE.\frac{CB}{DE}$$

d'où

$$\begin{aligned} AD.AC + AE.AB &= AD^2.\frac{CB}{DE} + AE^2.\frac{CB}{DE} \\ &= \frac{CB}{DE}.(AD^2 + AE^2) \\ &= \frac{CB}{DE}.DE^2 \ \ \textit{par Pythagore} \\ &= CB.DE \end{aligned}$$

On en conclut :

$$BC.ED–AB.AE–AC.AD = 0 \ \checkmark$$

Donc par le lemme 6 : $C'E.ED'–EO.EK–C'K.OD' = 0$.
D'où de l'équation 7.14 :

$$\begin{aligned} (C'E + ED')^2 &= (C'K + OD')^2 + (EO + EK)^2 \\ &= (C'K + OD')^2 + KO^2 \end{aligned} \tag{7.15}$$

Sur la même remarque on trouve

$$\begin{aligned} CV^2 &= (CI + IV)^2 = CI^2 + IV^2 + 2.CI.IV \\ &= CK^2 + KI^2 + IO^2 + OV^2 + 2.CI.IV \\ &= (CK + OV)^2 + (KI + IO)^2 \\ &= (CK + OV)^2 + KO^2 \end{aligned} \tag{7.16}$$

Or par 7.13 : $(C'E + ED')^2 > CV^2$
ie par 7.15 et 7.16 on a $(C'K + OD')^2 + KO^2 > (CK + OV)^2 + KO^2$ donc

$$(C'K + OD')^2 > (CK + OV)^2 \ \textit{d'oú}\ C'K + OD' > CK + OV \tag{7.17}$$

Donc la somme des « nouvelles » hauteurs est plus importante que les « initiales ».
Or $C'K = CK - CC'$ et $OD' = D'D + OD = D'D + OV$
D'où par 7.17

$$CK - CC' + D'D + OV > CK + OV \ \textit{ie}\ DD' > CC' \tag{7.18}$$

On a supposé que $AE < EF$ donc

$$KE < EO \tag{7.19}$$

Par 7.18 et 7.19 $KE.CC' < EO.DD'$ *ie* $\mathcal{A}_{CC'E} < \mathcal{A}_{EDD'}$
D'où par symétrie

$$\mathcal{A}_{CAC'E} < \mathcal{A}_{EDFD'} \tag{7.20}$$

Au final

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_ABC + \mathcal{A}_{DEF} &= \mathcal{A}_{AEC} + \mathcal{A}_{DEF} + \mathcal{A}_{D'EF} \\ &= \mathcal{A}_{ABC'} + \mathcal{A}_{CAC'E} + \mathcal{A}_{D'EF} - \mathcal{A}_{EDFD'} \end{aligned}$$

par 7.20 on obtient : $\underline{\mathcal{A}_ABC + \mathcal{A}_{DEF} < \mathcal{A}_{ABC'} + \mathcal{A}_{D'EF}}$
On a bien construit des triangles isocèles dont ni la base ni le périmètre global n'ont changé , mais leur aire globale est plus grande.✓

Voici la seconde méthode plus moderne :

Cherchons les points C et D optimal pour le problème.
Notons x la longueur AC (ou CB) et y la longueur DE (ou DF) .
Posons P = (AB+AC+BC) + (DE+FE+DF)= 2x +2y +AB +EF
P ne varie donc pas par définition. Remarquons tout d'abord que l'aire globale est majorée par P^2 *(la majoration est grossière) ce qui démontre l'existence d'un maximum. de l'aire globale.*
Nous avons :

$$x = \frac{(P - AB - EF)}{2} - y$$

on a

$$\mathcal{A}_{ABC+DEF} = \frac{AB}{2}.\sqrt{x^2 - (\frac{AB}{2})^2} + \frac{EF}{2}.\sqrt{y^2 - (\frac{EF}{2})^2}$$

$$\mathcal{A}_{ABC+DEF} = \frac{AB}{2}.\sqrt{x^2 - (\frac{AB}{2})^2} + \frac{EF}{2}.\sqrt{y^2 - (\frac{EF}{2})^2}$$

Dérivons l'expression par y

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -1$$

$$\frac{\partial \mathcal{A}_{ABC+EDF}}{\partial y} = \frac{AB}{2}.\frac{-x}{\sqrt{x^2 - (\frac{AB}{2})^2}} + \frac{EF}{2}.\frac{y}{\sqrt{y^2 - (\frac{EF}{2})^2}}$$

si le maximum de l'aire globale est atteinte est atteint alors

$$\frac{\partial \mathcal{A}_{ABC+EDF}}{\partial y} = 0$$

ie

$$\frac{AB}{2}.\frac{-x}{\sqrt{x^2 - (\frac{AB}{2})^2}} + \frac{EF}{2}.\frac{y}{\sqrt{y^2 - (\frac{EF}{2})^2}} = 0$$

or cela veut dire si l'on note h la hauteur dans ABC issue de C , et h' celle issue de D dans EDF

$$-\frac{AB}{2}.\frac{AC}{h} + \frac{EF}{2}.\frac{ED}{h'} = 0 \Leftrightarrow \frac{AB}{2.\cos(\frac{\widehat{ACB}}{2})} = \frac{EF}{2.\cos(\frac{\widehat{EDF}}{2})} \Leftrightarrow \frac{AB}{EF} = \frac{\cos(\frac{\widehat{ACB}}{2})}{\cos(\frac{\widehat{EDF}}{2})}$$

Or

$$EF = 2.\sin(\frac{\widehat{EDF}}{2}).y$$

$$AB = 2.\sin(\frac{\widehat{ACB}}{2}).x$$

d'où

$$\frac{x}{y} = \frac{\tan(\frac{\widehat{EDF}}{2})}{\tan(\frac{\widehat{ABC}}{2})}$$

Comme on a x=y par définition (les triangles sont isocèles et de même longueur de côté isocèle.) alors :

$$\tan(\frac{\widehat{EDF}}{2}) = \tan(\frac{\widehat{ABC}}{2})$$

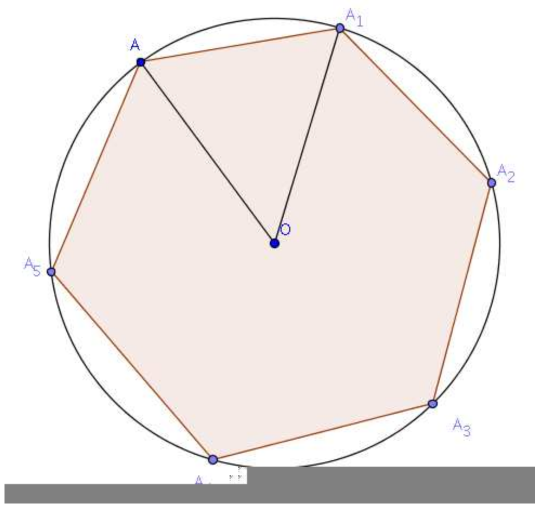
Comme tan est un isomorphisme de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ *on a par le fait que les triangles sont non plats donc* $\widehat{EDF} < \pi$ *et* $\widehat{ABC} < \pi$ *donc* $\frac{\widehat{EDF}}{2} < \frac{\pi}{2}$ *et* $\frac{\widehat{ABC}}{2} < \frac{\pi}{2}$ *donc*

$$(\frac{\widehat{EDF}}{2}) = (\frac{\widehat{ABC}}{2})$$

Les angles sont donc égaux. Les triangles sont donc semblables. ✓

Remarque 7

L'aire du polygone régulier $AA_1A_2...A_n$ *de centre O (le polygone de plus grande aire) de périmètre p vaut*



$$\mathcal{A} = n.\mathcal{A}_{AOA_1}$$

Or on a $\widehat{AOA_1} = \frac{2.\pi}{n}$ *, et* $AA_1 = \frac{p}{n}$ *donc En posant h la longueur de la hauteur issue de O dans le triangle* AOA_1

$$\mathcal{A}_{AOA_1} = \frac{AA_1}{2}.h$$

$$\mathcal{A}_{AOA_1} = \frac{p}{2.n}.h$$

Or

$$\begin{aligned} h &= OA.\cos(\frac{\pi}{n}) \\ &= .\frac{p}{2.n}.\frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}}\cos(\frac{\pi}{n}) \\ &= .\frac{p}{2.n}.\frac{1}{\tan(\frac{\pi}{n})} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= n.\frac{p}{2.n}.h \\ &= \frac{p^2}{4.ntan(\frac{\pi}{n})} \end{aligned}$$

Donc on peut noter que l'inégalité isopérimétrique pour un quadrilatère de périmètre p fixé et d'aire $\mathcal{A}$ *est :*

$$\mathcal{A} \leq \frac{p^2}{4.ntan(\frac{\pi}{n})}$$

Chapitre 8

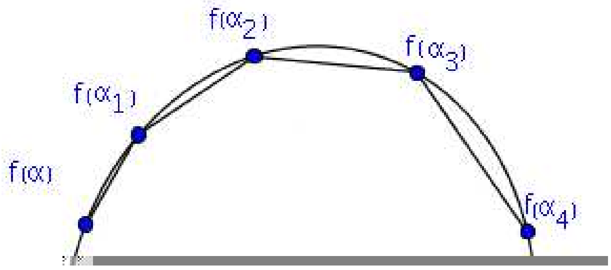
Pour les figures à bord rectifiable

On va maintenant considérer la famille la plus large possible pour le problème isopérimétrique : des figures dont on peut définir le périmètre et l'aire.

Il convient de définir les figures délimités par une courbe continue , fermée et simple. Celles-ci sont appelée communément les courbes de Jordan. En effet Jordan affirme que toute courbe de Jordan partage le plan en deux zônes dont l'une est bornée et l'autre pas. La reunion de la courbe est de la zone bornée forme un compact mesurable par la mesure de Lebesgue.L'aire de la figure est donc mesurable.

Pour en mesurer le périmètre p , il faut s'assurer de la "rectifiabilité" de la courbe formant la figure.Notion que nous allons rappeler :

Définition 1 *(Rectifiabilité d'une courbe)*
Si $f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^2$ est un paramétrage (continu) d'une courbe , on associe à toute subdivision $\sigma = \{ \alpha_0 = \alpha < \alpha_1 < ... < \alpha_n = \beta \}$ du segment $[\alpha\beta]$ la longueur $\lambda(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} \|f(\alpha_k) - f(\alpha_{k-1})\|$ de la ligne brisée de sommets $(f(\alpha_k))_{0\leq k\leq n}$; alors la courbe est rectifiable de longueur p si la famille $(\lambda(\sigma))_\sigma$ est bornée de borne supérieure égale à p.



Cette notion de rectifiabilité peut permettre de passer de la mesure de ligne polygonale à la mesure des arcs.D'ailleur la définition de la rectifiabilité met en avant la nécéssité de l'existence d'une borne supérieure à la longueur de toute les lignes polygonales approchant l'arc. Nous considérerons donc toutes les figures délimitées par des courbes de Jordan rectifiables ainsi toute figure décrit par une courbe rectifiable aura un périmètre mesurable.

8.1 La démonstration de Steiner

Steiner voulut prouver l'inégalité isopérimétrique par nécéssité. En effet il démontra des propriétés que doit posséder la solution du problème. Même si intuitivement on en déduit que la solution est le cercle , il n'en reste pas moins que la démonstration n'est pas complète. Elle ne prouve pas en effet ni l'unicité ni l'existence de la solution.

Ici nous allons démontrer les conditions suivantes :
- la convexité de la solution
- on peut partager le domaine de la figure en deux partie de même périmètre et d'aire identique.

– si deux points [a,b] partagent l'aire en deux partie égale, pour tout troisième point c sur le bord on a $\widehat{acb} = \frac{\pi}{2}$.

Théorème 1 *La solution ,si elle existe, du problème isopérimétrique est convexe.*

Démonstration 7 *De la même manière que Zénodore , on traite ce problème par l'absurde : on considère que la figure d'aire maximale de périmètre p fixé n'est pas convexe.*

Il s'ensuit qu'il existe au moins un couple de points appartenant à la courbe (a,b) tel que le la droite (ab) privé des points a et b n'appartient pas à la figure.

De là on pose j l'arc image de l'arc $\widetilde{ab}$ par la symétrie axiale d'axe (ab) , La mesure de j vaut la mesure de l'arc $\widetilde{ab}$(La symétrie conserve les longueurs). La courbe privé de l'arc $\widetilde{ab}$ auquel on "ajoute" l'arc j délimite une figure d'aire plus grande que la précédente et dont le périmètre est identique.

Il y a contradiction.

La figure solution est donc convexe. ✓

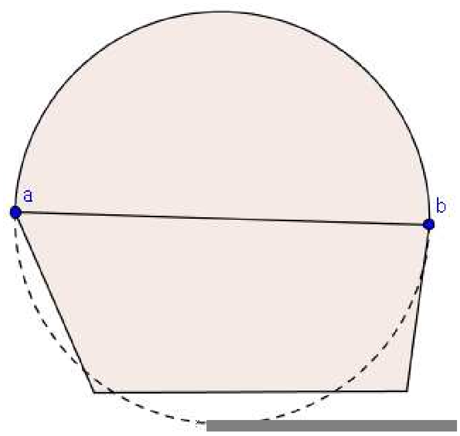
Théorème 2 *Si deux points a,b sont sur le bord de la courbe (délimitant la figure solution) et le partage en deux parts égales alors le segment [a,b] ainsi créé partage l'aire en deux partie égales aussi.*

Démonstration 8 *On traite encore une fois ce problème par l'absurde : on considère qu'il existe deux points partageant le périmètre en deux dont le segment créé ne partage as l'aire de la figure en deux parties égales.*

Il s'ensuit de créé l'image de la partie d'aire la plus grande par la symétrie d'axe (ab). La figure reunissant la partie d'aire la plus grande et de son image par la symétrie , est de même périmètre mais d'aire plus grande.

Il y a contradiction.

Tout couple de points (ab) sur la courbe de a figure solution partageant son périmètre en deux partie égale partage , le segment [ab] partage son aire en deux parties égales . ✓



Théorème 3 *Si deux points [a,b] partagent l'aire en deux partie égale, pour tout troisième point c sur le bord on a $\widehat{acb} = \frac{\pi}{2}$.*

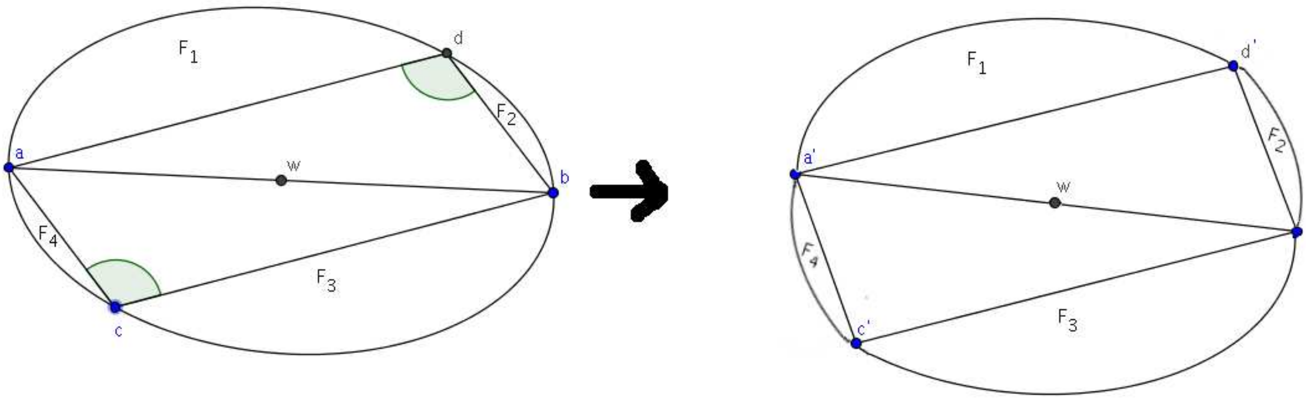
Démonstration 9 *On traite encore une fois ce problème par l'absurde : On considère a,b deux points de la courbe délimitant la figure solution qui partage la périmètre en deux parties égales (par conséquent le segment [ab] partage aussi l'aire en deux parties égales).*

On peut supposer que la figure est symétrique par rapport au point w milieu du segment [ab] , l'aire d'une partie ne pouvant être plus petite que l'autre , on procède en faisant l'image d'une des deux parties de la figure par w. L'aire de la nouvelle figure reunissant la partie et son image par w , est de même aire et de même périmètre que la figure considérée. On peut donc la prendre en compte comme étant aussi d'aire maximale.

On considère le point c de la courbe tel que $\widehat{acb} \neq \frac{\pi}{2}$. Soit le point d l'image du point c par la symétrie de centre w. d se trouve par définition sur la figure.

Considérons les parties de la figure : F_1 , F_2 , F_3 , F_4 et le quadrilatère adbc. Le quadrilatère adbc est donc un parallèlogramme non-rectangle et on a :

$$\mathcal{A}_{adbc} < ad.bc$$



Considérons le rectangle a'd'b'c' dont $a'd' = ad$ et $d'b' = db$ alors

$$\mathcal{A}_{a'd'b'c'} = ad.bc$$

Comme les côtés de ce nouveau quadrilatère sont de même mesure que l'initial alors on peut y " rattacher" les autres parties F_1 , F_2 , F_3 et F_4 L'aire de cette nouvelle figure est donc plus grande que l'initiale car :

$$\mathcal{A}_{adbc} < \mathcal{A}_{a'd'b'c'}$$

D'où

$$\mathcal{A}_{adbc} + \mathcal{A}_{F_1} + \mathcal{A}_{F_2} + \mathcal{A}_{F_3} + \mathcal{A}_{F_4} < \mathcal{A}_{a'd'b'c'} + \mathcal{A}_{F_1} + \mathcal{A}_{F_2} + \mathcal{A}_{F_3} + \mathcal{A}_{F_4}$$

Il y a donc contradiction donc si deux points [a,b] partagent l'aire en deux partie égale, pour tout troisième point c sur le bord on a $\widehat{acb} = \frac{\pi}{2}$. ✓

Il suffit maintenant de ce théorème 3 de considérer deux points a et b . De ces deux points il faut considérer le lieu géométrique des points c vérifiant $\widehat{acb} = \frac{\pi}{2}$.. On conclut que c'est un cercle. Cette démonstration ne repose que sur l'existence d'une courbe d'aire maximale. En effet , la démonstration de Steiner ne repose que sur des nécéssités que doit avoir la courbe solution. Malheureusement il pourrait y avoir d'autres nécéssités que le cercle ne puisse posséder , et on pourrait conclure que le problème ne possède pas de solution.

8.2 La démonstration de Weierstrass

La démonstration de Weierstrass du problème isopérimétrique n'est en fait q'un cas spécifique au problème que Weierstrass démontra . En effet , ce fût ce problème que Weierstrass résolu :

Problème 1 *Trouver de toutes les courbes d'une longueur donnée et qui rejoigne deux points fixés , celle qui comprend l'aire maximale entre elle et le segment rejoignant ces deux points.*

La démonstration associé fait appel aux équation d'Euler que nous allons rappeller :

Théorème 4 *(Equations d'Euler-Langrange) Soit* $\mathcal{U}$ *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* $J \in C^1([0,1] \times \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}$ *si* m_0 *et* $m_1 \in \mathcal{U}$ *on cherche à minimiser* $\mathcal{J}(c) = \int_0^1 J(t, c(t), c'(t))dt$ *parmi toutes les courbes* C^1 *de* $\mathcal{U}$ *joignant* m_0 *à* m_1*. Soit* $H = \{ \in C^1([0,1], \mathbb{R}^n), c([0,1]) \subset \mathcal{U}, c(0) = m_0, c(1) = m_1 \}$ *Alors si c est un minimum local de*

$$\mathcal{J} : H \to \mathbb{R}$$

alors c vérifie les equations dites d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt} D_3 J(t, c(t), c'(t)) = D_2 J(t, c(t), c'(t))$$

Et celle avec les extremas dit liés :

Théorème 5 *(Avec contrainte) On suppose de plus que* $K \in C^1([0,1] \times U \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *, on considère la fonctionnelle :*

$$\mathcal{K}(c) = \int_0^1 K(t, c(t), c'(t))dt$$

On pose $\sum = \{c \in H \ , \ (c) = 0\}$*. On suppose que* $c \in \sum$ *et que c est un minimum local de* $\mathcal{J}$*. On suppose en plus qu'il existe* $k \in C^1([0,1], \mathbb{R}^n)$ *avec k(0)=k(1)=0 et*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mid_{s=0} \mathcal{K}(c + sk) &= D\mathcal{K}(c)k \\ &= \int_0^1 D_2 K(t, c(t), c'(t))(k(t)) + D_3 K(t, c(t), c'(t))(k'(t))dt \neq 0. \end{aligned}$$

Alors il existe un constante $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\frac{d}{dt}[D_3 J(t, c(t), c'(t)) - \lambda D_3 K(t, c(t), c'(t))] = D_2 J(t, c(t), c'(t)) - \lambda D_2 K(t, c(t), c'(t))$$

Procédons à la démonstration de Weierstrass :

Démonstration 10 *Soit la courbe considérée . On peut trouver un paramétrage c définie comme suit :*

$$\begin{aligned} c : [0,1] &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\to (t, f(t)) \end{aligned}$$

avec f C^1 *et positive. Les deux points considérés seront les points* $(0, f(0))$ *et* $(1, f(1))$ *Soit L la longueur de la courbe, elle est donnée par :*

$$L = \int_0^1 \|c'(t)\| dt = \int_0^1 \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$$

Soit A l'aire compris entre le segment et la courbe , elle est donnée par :

$$A = \int_0^1 f(t)dt$$

Il faut donc obtenir la plus grande aire avec comme contrainte la longueur L fixée.

Posons deux fonctions :

$$J(t, x, \epsilon) = x \quad \textit{correspond á l'aire (ce que l'on veut de maximal)}$$
$$K(t, x, \epsilon) = \sqrt{1+\epsilon^2} \quad \textit{correspond á la longueur (la contrainte)}$$

D'après Euler on sait qu'il existe λ *tel que :*

$$\frac{d}{dt}(O - \lambda \frac{f'(t)}{\sqrt{1+(f'(t)^2)}}) = 1 - 0$$

On voit évidément que $\lambda \neq 0$ *(sinon on aurait* $0 = 1$*) et donc avec un certain* t_0*(constante quand on integre) :*

$$\frac{f'(t)}{\sqrt{1+(f'(t)^2)}} = -\frac{(t-t_0)}{\lambda}$$

d'où

$$\frac{f'(t)^2}{1+(f'(t)^2)} = \frac{(t-t_0)^2}{\lambda^2}$$

$$f'(t)^2(1 - (\frac{(t-t_0)}{\lambda})^2) = (\frac{(t-t_0)}{\lambda})^2$$

et donc :

$$\frac{1}{\lambda}f'(t) = \pm \frac{\frac{(t-t_0)}{\lambda^2}}{\sqrt{1-(\frac{(t-t_0)}{\lambda})^2}} = \pm \frac{d}{dt}\sqrt{1-(\frac{(t-t_0)}{\lambda})^2}$$

Ce qui implique qu'il existe un u (la constante quand on integre) tel que

$$\frac{(f(t)-u)^2}{\lambda^2} + \frac{(t-t_0)^2}{\lambda^2} = 1$$

Ce qui correspond à l'équation d'un cercle. Donc la réponse au probleme est l'arc de cercle joignant les deux points. En considérant les deux poins confondus ,on obtient un cercle✓

8.3 La démonstration de Hurwitz

Théorème 6 *(L'inégalité isopérimétrique) Soit une courbe fermée définie par une fonction F(t)=(x(t),y(t)) périodique, continûment dérivable. Soient L sa longueur et A l'aire du domaine qu'elle borne. Alors :*

$$L^2 \geq 4\pi A$$

De plus il y a égalité si et seulement si la courbe est un cercle.

Enfin le théorème reste vrai quand on suppose la courbe seulement de classe $\mathcal{C}^1$ *par morceaux et continue.*

La démonstration se base sur l'inégalité de Wirtinger , inégalité que nous alons énoncer puis démontrer avant de procéder à la démonstration proprement dite du théorème.

Lemme 7 *(Inégalité de Wirtinger) Soit f une fonction $2\pi-$périodique, de moyenne nulle, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue. Alors*

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f(t))^2dt \leq \|f'\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f'(t))^2dt$$

De plus si $||f|| = ||f'||$, alors f est une fonction sinusoïdale

$$f(x) = A\cos(x) + B\sin(x) = C\cos(x+D)$$

Démonstration 11 *(Inégalité de Wirtinger) On note suivant les séries de Fourier :*

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$$

f étant de moyenne nulle on a

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0 \tag{8.1}$$

Alors la série suivante converge par Parseval :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2dt = \|f\|^2$$

Comme f est dérivable on a :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f(t)e^{-int})'dt = 0$$

car la fonction $t \rightarrow f(t)e^{-int}$ est $2\pi-$périodique. Or par intégration par partie :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f(t)e^{-int})'dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f'(t)e^{-int}dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)(-in).e^{-int}dt$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f'(t)e^{-int}dt &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)in.e^{-int}dt \\ c_n(f') &= inc_n(f) \qquad (8.2)\end{aligned}$$

Donc par Parseval :

$$\begin{aligned}\|f'\|^2 - \|f\|^2 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n(f')|^2 - \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n(f)|^2 \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|inc_n(f)|^2 - \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n(f)|^2 \quad par \quad 8.2 \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n(f)|^2(n^2-1) \\ &= \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{+\infty}|c_n(f)|^2(n^2-1) - |c_0(f)|^2 \\ &= \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{+\infty}|c_n(f)|^2(n^2-1) \quad par \quad 8.1 \qquad (8.3)\end{aligned}$$

Les termes de la serie 8.3 sont tous positifs donc : $\|f'\|^2 - \|f\|^2 \geq 0$

Montrons le cas d'égalité :

En reprenant la formule 8.3 il faut que (sachant que $c_0(f) = 0$*) :*

$$\forall\ n\ \epsilon\ \mathbb{Z}\diagdown\{1, -1\} \quad (n2-1)|cn(f)|^2 \ = \ 0$$

Ce qui implique par positivité des termes que :

$$\forall\ n\ \epsilon\ \mathbb{Z}\ \diagdown\{1, -1\} \quad cn(f) \ = \ 0$$

Donc f appartient à un sous-espace hilbertien de dimension 2 de l'espace des fonction L^2 *et* $2\pi-$*périodique. Cet espace est donc généré par* e^{ix} *et* e^{-ix}*. il existe donc* α *et* β *tels que*

$$f(t) = \alpha e^{ix} + \beta e^{-ix}$$

Trouvons deux autres fonctions plus adaptés indépendantes vérifiant la relation précédente , ces deux fonctions généreront aus donc ce sous-espace. :

En testant que les fonctions cosinus et sinus on voit qu'elles correspondent aussi à deux générateurs indépendants : Posons :

$$\begin{aligned} g : t &\rightarrow 2.\cos(t) = e^{-it} + e^{it} \\ h : t &\rightarrow 2.\sin(t) = -ie^{-it} + ie^{it} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_0(g) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\cos(t)dt \\ &= 0 \ \textit{sinus (la primitive de cosinus) étant } 2.\pi - \textit{périodique.} \\ c_1(g) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)e^{-it}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-2it} + 1dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-2it}dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dt \\ &= 1 \ \textit{ et de même} \\ c_{-1}(g) &= 1 \end{aligned}$$

Si $|n| \geq 2$ *alors*

$$\begin{aligned} c_n(g) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t)e^{-int}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i(n+1)t} + e^{-i(n-1)t}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i(n+1)t}dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i(n-1)t}dt \\ &= 0 + 0 \end{aligned}$$

Et on obtient aussi :

$$\begin{aligned}
c_0(h) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2.\sin(t)dt \\
&= 0 \ cosinus \ \ (la\ primitive\ de\ sinus)\ \acute{e}tant\ 2.\pi - p\acute{e}riodique. \\
c_1(h) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(t)e^{-it}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2it} - idt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2it}dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} idt \\
&= -i \ \ et\ de\ m\hat{e}me \\
c_{-1}(h) &= -i
\end{aligned}$$

Si $|n| \geq 2$ *alors*

$$\begin{aligned}
c_n(h) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\sin(t)e^{-int}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} -ie^{-i(n-1)t} + ie^{-i(n+1)t}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} -ie^{-i(n+1)t}dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ie^{-i(n-1)t}dt \\
&= 0 + 0
\end{aligned}$$

Montrons leur indépendance :

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} g(t).h(t)dt &= \int_0^{2\pi} (e^{-it} + e^{it})(-ie^{-it} + ie^{it})dt \\
&= \int_0^{2\pi} -ie^{-2it} + i - i + ie^{2it}dt \\
&= \int_0^{2\pi} -sin(2t)dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc f est de la forme :

$$f(t) = A.cos(t) + B.sin(t) \quad A\ et\ B\ r\acute{e}els$$

Ce qui peut s'écrire :

$$f(t) = Ccos(t + D)\checkmark$$

Procédons à la démonstration de l'inégalité isopérimétrique

Démonstration 12 *Pour une courbe délimitant une aire sur le domaine* $\{t \ \ telque \ \ 0 \leq t \leq T\}$ *avec F(T) = F(0). rappelons tout d'abord les formules exprimant la longueur de la courbe L et l'aire délimité par la courbe A.*

$$L = \int_0^T |F'(t)|dt = \int_0^T \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt \qquad A = \frac{1}{2}|\int_0^T x(t)y'(t) - y(t)x'(t)dt|$$

Une première étape consiste à effectuer quelques normalisations

Utilisation de l'abscisse curviligne *On peut choisir d'utiliser l'abscisse curviligne ce qui ramène le problème au cas où* $\|F'(t)\| = 1$ *et donc* $L = T$.

Un changement d'échelle *Tout d'abord , remarquons que le problème reste invariant par changement d'échelle , en effet si l'unité de longueur est multiplié par* λ *alors les deux membres de l'inégalité* $L^2 \geq 4.\pi A$ *sont divisés par* λ^2 *et l'on retrouve la même inégalité (après la simplification par* λ^2*). On peut donc se ramener au cas où* $L = 2\pi$ *. L'inégalité devient* $A \leq \pi$.

Une translation *Si on pose :* $m = \int_0^{2\pi} F(t)dt$ *alors la translation* $z \to z - m$ *permet de se ramener à la situation où l'on a :* $\int_0^{2\pi} F(t)dt = 0$ *La translation ne change en rien au terme de l'inégalité.*

Par inégalité triangulaire on a :

$$A = \frac{1}{2}|\int_0^{2\pi} x(t)y'(t) - y(t)x'(t)dt| \leq \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |x(t)y'(t) - y(t)x'(t)|dt$$

avec

$$\begin{aligned} |xy' - yx'| &= |\Im((x+iy)(x'+iy'))| \\ &= |\Im(FF')| \\ &\leq |F||F'| \\ &= |F| \quad car \quad |F'| = 1 \quad par \quad l'abscisse \quad curvilgne \end{aligned} \tag{8.4}$$

On en conclut donc par 8.4 :

$$A \leq \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |F(t)|dt$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz on trouve par ailleur :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |F(t)|dt &\leq (\int_0^{2\pi} |F(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}}.(\int_0^{2\pi} 1^2 dt)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{2\pi}.(\int_0^{2\pi} |F(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{8.5}$$

Par la condition de fermeture $F(0) = F(2\pi)$ *on prolonge* F *en une fonction* $2\pi-$*périodique de classe* C^1 *par morceaux et continue sur* $\mathbb{R}$ *. Par la translation on peut appliquer l'inégalité de Wirtinger on obtient ainsi :*

$$\int_0^{2\pi} |F(t)|^2 dt \leq \int_0^{2\pi} |F'(t)|^2 dt = 2\pi \tag{8.6}$$

Par 8.5 et 8.6 on obtient :

$$A \leq \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\sqrt{2\pi} = \pi$$

C'est l'inégalité recherchée.

Traitons le cas d'égalité : Il faut déjà que F vérifie le cas d'égalité dans l'inégalité de Wirtinger : Or d'après celle-ci le cas d'égalité implique que $F(t) = \alpha e^{-it} + \beta e^{it}$ *pour des constantes complexes* α *et* β *convenables. On a donc* $F'(t) = -i\alpha e^{-it} + i\beta e^{it}$ *, d'où* $|F'(t)|^2 = (-i\alpha e^{-it} + i\beta e^{it})(-i\alpha e^{-it} - i\beta e^{it}) = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\Re(\beta\bar{\alpha}e^{2it})$*. La relation* $|F'(t)| = 1$ *pour tout t implique alors* $\beta\bar{\alpha} = 0$ *car sinon la quantité* $|F'(t)|$ *"évoluerait" suivant les valeurs de t, elle ne serait donc pas toujours égale à 1. Il reste ainsi deux possibilités :*

- $\beta = 0$ *et* $F(t) = \alpha e^{-it}$
- $\alpha = 0$ *et* $F(t) = \beta e^{it}$

Dans ces deux cas F forme un cercle.✓